EXAMEN I 74310 KVANTEMEKANIKK 1 23.05.00
Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\langle F \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t)\widehat{F}\,\Psi(\vec{r},t)\,d^3r,$$

integrert over hele rommet.

$$\text{Hermitisitet:} \quad \int \Psi^*\widehat{F}\Phi\,d^3 = \int \Phi(\widehat{F}\Psi)^*\,d^3r.$$

Målbare verdier for en fysisk størrelse er egenverdiene for den tilhørende operator. Målbare verdier er reelle, og hermiteske operatorer har reelle egenverdier.

b)

$$[\widehat{p}_x^2, x] = \widehat{p}_x^2x - x\widehat{p}_x^2 = \widehat{p}_x(\widehat{p}_xx - x\widehat{p}_x) + (\widehat{p}_xx - x\widehat{p}_x)\widehat{p}_x = \widehat{p}_x(-i\hbar) + (-i\hbar)\widehat{p}_x = -2i\hbar\widehat{p}_x.$$

Oppgave 2

Vi ønsker å skrive tilstanden $\Psi(x,0)$ som en overlagring av egentilstander. Ved å bruke den oppgitte trigonometriske relasjon får vi

$$\Psi(x,0) = \frac{10}{\sqrt{63L}}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{5}{\sqrt{63L}}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{\sqrt{65L}}\sin\frac{5\pi x}{x}.$$

Uttrykt ved de oppgitte egenfunksjonene:

$$\Psi(x,0) = \frac{10}{\sqrt{126}}\psi_1(x) - \frac{5}{\sqrt{126}}\psi_3(x) + \frac{1}{\sqrt{126}}\psi_5(x).$$

Generelt er de mulige resultater ved energimåling en av Hamiltonoperatorens egenverdier E_n. Sannsynlighetene for de ulike resultatene er

$$p_n = |c_n|^2,$$

der c_n er koeffisientene når bølgefunksjonene utvikles i energiegenfunksjoner: $\Psi = \sum_n c_n \psi_n(x)$. I dette tilfelle er

$$p_1 = \frac{100}{126}, \qquad p_3 = \frac{25}{126} \qquad p_5 = \frac{1}{126},$$

og alle andre sannsynligheter lik null. I dette tilfelle vil en få en av verdiene E_1, E_3, E_5 ved energimålingen.

Oppgave 3

a) Med $\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$ blir

$$\hat{q}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(a+a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+a^{\dagger 2})|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle\right).$$

Vi har brukt $a|0\rangle = 0$, $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, $a|1\rangle = |0\rangle$ og $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle$. Ved å ta skalarproduktet med $\langle 0|$ får vi da egentilstandene er ortonormerte:

$$\langle 0|\hat{q}^2|0\rangle = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2m\omega}}}.$$

For fjerdepotensen kan vi gjøre det på samme vis. Alternativt bruker vi fullstendighetsrelasjonen $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ til å skrive

$$\langle 0|\hat{q}^4|0\rangle = \sum_n \langle 0|\hat{q}^2|n\rangle\langle n|q^2|0\rangle = \sum_n |\langle n|\hat{q}^2|0\rangle|^2.$$

Uttrykket vi fant for $\hat{q}^2|0\rangle$ viser at det er bare $n = 0$ og $n = 2$ som bidrar. Det gir

$$\langle 0|\hat{q}^4|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (1+2) = \underline{\underline{\frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}}}.$$

b) For $c = 1$ får vi en symmetrisk oscillator, med $E_0(1) = \frac{1}{2}\hbar\omega$. For $c = \infty$ er potensialet uendelig til venstre for origo. Dette området er derfor utilgjengelig, og $\psi = 0$ her. Da bølgefunksjonen er kontinuerlig må bølgefunksjonen i det tilgjengelige området $x > 0$ også være null i origo. Forøvrig er Schrödingerlikningen for $x > 0$ den samme som for den symmetriske oscillatoren. Oscillator-egenfunksjonene $\psi_n(q)$ for odde n er null i origo, og den med lavest energi er $\psi_1(q)$, som altså er grunntilstanden i "halvoscillator"-problemet. Energien er $E_0(\infty) = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Ved å innføre $\omega = \widehat{\omega}/c$ blir potensialet

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \widehat{\omega}^2 q^2 & \text{for } q \leq 0 \\ \frac{1}{2} m c^{-2} \widehat{\omega}^2 q^2 & \text{for } q \geq 0. \end{cases}$$

For $c \to 0$ vil potensialet på høyre side blir svært stort, så vi er i samme situasjon som for $c \to \infty$, med svaret

$$E_0 = \tfrac{3}{2} \hbar \widehat{\omega} = \tfrac{3}{2} c \hbar \omega.$$

Så grunntilstandsenergien går mot null proporsjonalt med c.

c) Som læreboka.

d) Ved å sette $c = 1 + \lambda$, dvs $c^2 = 1 + 2\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$, blir avviket fra det vanlige symmetriske oscillatorpotensialet:

$$\lambda \widehat{H}_1 = \begin{cases} m\omega^2 q^2 \, \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) & \text{for } q \leq 0 \\ 0 & \text{for } q \geq 0. \end{cases}$$

Siden grunntilstanden $\langle q|0\rangle$ i det uperturberte problemet er symmetrisk i posisjonen q, blir middelverdien av perturbasjonen halvparten av

$$\langle 0| m\omega^2 q^2 \, \lambda |0\rangle.$$

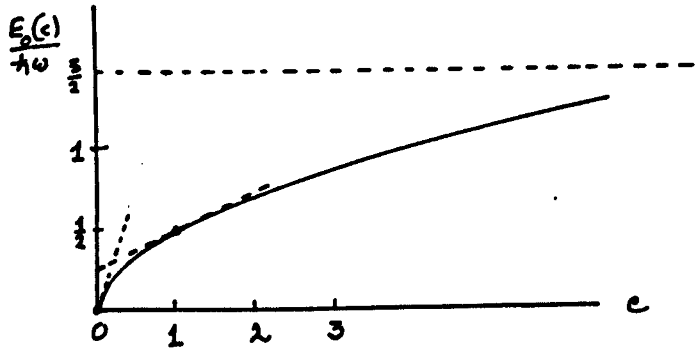
Dette regnet vi ut i oppgave 3a). Vi får

$$E_0 = \tfrac{1}{2} \hbar \omega + \tfrac{1}{2} \lambda \tfrac{1}{2} \hbar \omega.$$

Førsteordensbidraget blir da

$$\frac{E_0(c)}{\hbar \omega} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(c-1).}}$$

Skisse:



Oppgave 4

a) Som læreboka.

b) Vi skulle finne et estimat for grunntilstandsenergien E_0 i det triangulære potensialet

$$V(z) = \begin{cases} \infty & \text{for } z < 0 \\ Fz & \text{for } z \geq 0 \end{cases}$$

ved variasjonsmetoden vha prøvefunksjonen

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z < 0 \\ ze^{-\frac{1}{2}\alpha z^2} & \text{for } z \geq 0 \end{cases}$$

Vi må beregne middelverdien av Hamiltonoperatoren (for $z \geq 0$)

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + Fz$$

vha prøvefunksjonen $f(z)$:

$$E[f] = \frac{\int_0^\infty f^* \widehat{H} f \, dz}{\int_0^\infty |f|^2 \, dz}.$$

Vi trenger tre integraler:

1) $\int_0^\infty |f|^2\,dz = \int_0^\infty z^2 e^{-\alpha z^2}\,dz = \alpha^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}/4.$

2) $-(\hbar^2/2m)\int_0^\infty f f''\,dz = -(\hbar^2/2m)\int_0^\infty z(-3\alpha z+\alpha^2 z^3)e^{-\alpha z^2}\,dz = (\hbar^2/2m)\frac{3}{8}\sqrt{\pi/\alpha}.$

3) $F\int_0^\infty z|f|^2\,dz = F\int_0^\infty z^3 e^{-\alpha z^2}\,dz = \frac{1}{2}F\alpha^{-2}.$

Det gir

$$E[f] = \frac{(\hbar^2/2m)\frac{3}{8}\sqrt{\pi/\alpha} + (2/\sqrt{\pi})F\alpha^{-2}}{\alpha^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}/4} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{3}{2}\alpha + \frac{2F}{\sqrt{\pi\alpha}}.$$

Jo mindre verdi, jo bedre estimat. For å finne minimum deriverer vi mhp α. Det gir

$$\frac{\hbar^3}{2m}\frac{3}{2} - F\pi^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-\frac{3}{2}} = 0, \qquad \text{eller} \qquad \alpha = \left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}}F\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Når vi setter denne verdien tilbake i uttrykket for $E[f]$ finner vi minimalverdien

$$\underline{\underline{E_0 = 3\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}}F^{\frac{2}{3}}}} \simeq \underline{\underline{2.3448\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}}F^{\frac{2}{3}}}}.$$