UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. P.C.Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
OG I FAG 71515 STATISTISK MEKANIKK
VED AVH: F 113 STATISTISK MEKANIKK

Torsdag 26. 1. 1989

Kl.0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1 besvares på oppgavearket; oppgave 2 og 3 besvares, som vanlig, på separate ark.

Oppgave 1 Korte spørsmål

Hvert av de 5 spørsmålene teller likt. Besvares ved avkryssing i feltene på selve oppgavearket.

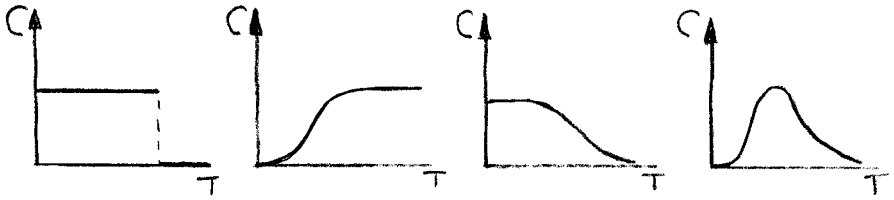
Riktig svar: +4 poeng

Galt svar: −1 poeng

Intet svar: 0 poeng

(Ved mer enn ett kryss regnes middelverdien av de avkryssede svar).
N poeng totalt tilsvarer tallkarakteren 5 − 0.2N.

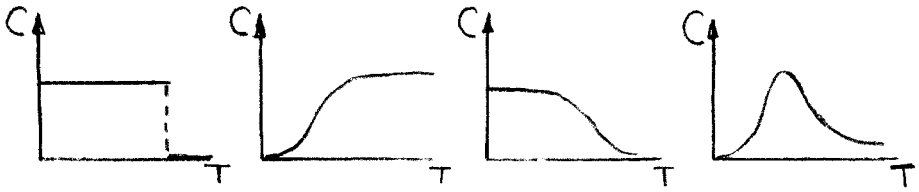
A. En partikkel har bare to tilstander med ulik energi tilgjengelige. Temperaturvariasjonen av systemets varmekapasitet C har følgende kvalitative forløp (kryss av i riktig felt nedenfor):



noe annet

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

B. To ikke vekselvirkende fermioner har bare to énpartikkel-tilstander med ulik energi tilgjengelige. Temperaturvariasjonen av systemets varmekapasitet C har følgende kvalitative forløp (kryss av i riktig felt nedenfor):



noe annet

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

C. En romlig harmonisk oscillator (potensiell energi $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$) er i termisk likevekt ved en så høy temperatur at klassisk statistisk mekanikk kan benyttes. Oscillatorens midlere energi er (kryss av)

a) $\frac{1}{2}$ k ☐

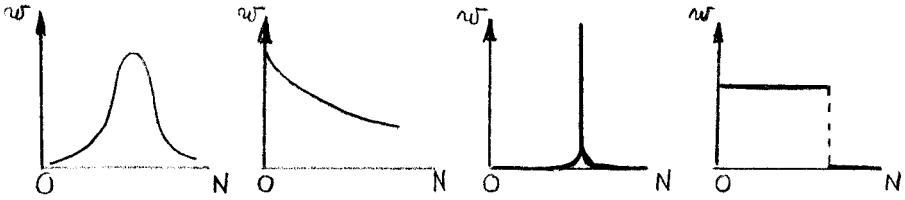
b) $\frac{3}{2}$ k ☐

c) $\frac{3}{2}$ kT ☐

d) 3 kT ☐

e) noe annet ☐

D. Et åpent delvolum (størrelse $1 cm^3$) av en gass befinner seg i tyngdefeltet ved romtemperatur og atmosfæretrykk. Sannsynligheten w(N) for at antall gassmolekyler er N varierer, grovt sett, med N slik (kryss av i riktig felt nedenfor):



noe annet

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐ e) ☐

E. I van der Waals tilstandslikning er trykket gitt ved

$$p = \frac{kT\rho}{1-b_0\rho} - a_0\rho^2$$

der ρ er antallstettheten og a_0, b_0 er konstanter. Annen virialkoeffisient er da (kryss av):

a) $-a_0$ ☐

b) $-a_0\rho^2$ ☐

c) $b_0 - a_0(kT)^{-1}$ ☐

d) b_0 ☐

e) noe annet ☐

Oppgave 2

I et molekyl er det tre atomer som har et magnetisk moment. Vekselvirkningen mellom de tre magnetiske momentene er parvekselvirkning av Ising type og kan representeres ved energifunksjonen

$$H = J(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)$$

når det ikke er noe ytre magnetfelt. Enhetene er valgt slik at den positive konstant J har dimensjon energi og de tre spinnvariable s_i tar verdien $+1$ eller -1.

I det følgende tar vi ikke med bidrag til indre energi eller varmekapasitet fra andre frihetsgrader (translasjon, rotasjon, vibrasjon).

a) Hvilke mulige energiverdier har molekylets totale spinnvekselvirkning H, og hvor mange spinnkonfigurasjoner svarer til hver energiverdi?
Hva er spinn-partisjonsfunksjonen Z for ett molekyl?

b) Vis at for et helt generelt spinnsystem (av Isingtype) med energifunksjon $H(s_1, \ldots s_N)$, kan den indre energi U uttrykkes ved systemets partisjonsfunksjon Z ved sammenhengen

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \ .$$

c) Vis at for molekylet beskrevet ovenfor kan den indre energi u skrives som

$$u = 3J - \frac{12J}{3+e^{-4\beta J}} \ .$$

Hva er $u(T=0)$ og $u(T\to\infty)$? Kunne du angitt disse verdiene direkte uten å regne ut $u(T)$?

d) Et mol av en gass består av uavhengige molekyler av ovennevnte type. Beregn varmekapasitetsbidraget C fra spinnfrihetsgradene. Skisser kvalitativt temperaturvariasjonen av $C(T)$.

Oppgave 3

a) Skriv ned uttrykket for den kanoniske partisjonsfunksjon Z for et kvantesystem der energien til tilstand n er E_n.

b) For ideelle kvantegasser er alle energinivåene E_n i et volum V proporsjonale med $V^{-2/3}$. Bruk den kanoniske partisjonsfunksjon til å vise at trykket er $\frac{2}{3}$ av indreenergitettheten , $p = 2U/3V$.

c) Anta at énpartikkelnivåene for en gass av N ikke vekselvirkende fermioner ligger svært tett i energiintervallet $(0,\infty)$ og at det er meget nær

$$4\pi(2m/h^2)^{\frac{3}{2}} V \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon$$

tilstander med energi i intervallet $(\epsilon, \epsilon+d\epsilon)$. Her er m partikkelmassen og h Plancks konstant.

Beregn trykket ved det absolutte nullpunkt $T=0$, uttrykt ved de oppgitte størrelser.