# EKSAMEN 14. 8. 1990, LØSNINGSSKISSE.

## Oppgave 1

a) $$Z = \sum_{s_i=\pm 1} e^{+\beta J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_5) + h\beta s_5}$$

Ved å summere over $s_1$ først: $\sum_{s_1=\pm 1} e^{\beta J s_1 s_2} = 2\cosh(\beta J)$, så over $s_2$, $s_3$ og $s_4$ fås

$$Z = [2\cosh(\beta J)]^4 \cdot \sum_{s_5=\pm 1} e^{\beta h s_5} = \underline{\underline{32 \cosh^4(\beta J) \cosh(\beta h)}}$$

b) $$\langle s_5 \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_5) + h\beta s_5} \cdot s_5$$

$$= \frac{1}{Z} [2\cosh(\beta J)]^4 \underbrace{\sum_{s_5=\pm 1} s_5 e^{\beta h s_5}}_{2\sinh(\beta h)} = \underline{\underline{\tanh(\beta h)}}$$

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_i=\pm 1} s_1 e^{\beta J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_5) + h\beta s_5}$$

Vha $\sum_{s_1=\pm 1} s_1 e^{\beta J s_1 s_2} = s_2 2\sinh(\beta J)$, deretter summasjon over $s_2$, $s_3$ og $s_4$, fås

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z} [2\sinh(\beta J)]^4 \sum_{s_5=\pm 1} s_5 e^{h\beta s_5} = \frac{[2\sinh(\beta J)]^4 \, 2\sinh(\beta h)}{Z}$$

$$= \underline{\underline{\tanh^4(\beta J) \tanh(\beta h)}}$$

så

$$\langle s_5 \rangle = \langle s_1 \rangle \tanh^4(\beta J).$$

c) (i) For $T = 0$ $(\beta = \infty)$ er $\underline{\underline{\langle s_1 \rangle = 1}}$

(ii) For $T = \infty$ $(\beta = 0)$ er $\underline{\underline{\langle s_1 \rangle = 0}}$

(iii) For $J = \infty$ er $\underline{\underline{\langle s_1 \rangle = \tanh(\beta h)}}$

Direkte:

(i) For $T=0$ er systemet i laveste energitilstand som fås ved at alle $s_i = 1$. Altså $s_1 = 1$ også.

(ii) For $T=\infty$ er den termiske uro så voldsom at alle konfigurasjoner er like sannsynlige. Altså $s_1$ er $+1$ og $-1$ med lik sannsynlighet, dvs $\langle s_1 \rangle = 0$

(iii) For $J=\infty$ er alle spinn parallelle fordi det krever $+\infty$ energi å ha antiparallelle spinn. Alle spinnene følger derfor spinn 5 som er det eneste som påvirkes av $\mathcal{H}$; dvs $\langle s_1 \rangle = \langle s_5 \rangle = \tanh(\beta h)$.

## Oppgave 2

a)
$$\rho(\vec{r}_1 \ldots \vec{p}_N) d^3r_1 \ldots d^3p_N = \frac{e^{-H(\vec{r}_1, \ldots \vec{p}_N)/kT} \, d^3r_1 \ldots d^3p_N}{\int d^3r_1 \ldots d^3p_N \; e^{-H(\vec{r}_1, \ldots \vec{p}_N)/kT}}$$

er sannsynligheten for å finne posisjonen til partikkel nr. 1 i elementet $d^3r_1$ omkring verdien $\vec{r}_1$, osv.

$k$ = Boltzmann's konstant; $T$ = absolutt temperatur

b)
$$\left\langle \frac{p_x^2}{2m} \right\rangle = \underline{\underline{\frac{kT}{2}}}$$ etter ekvipartisjonsprinsippet

$$\langle ax^4 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ax^4 \, e^{-\beta a x^4} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta a x^4} dx} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta a x^4} dx$$

Ny variabel ved $x = (y/\beta a)^{\frac{1}{4}}$ gir

$$\langle ax^4 \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[ \beta^{-\frac{1}{4}} a^{-\frac{1}{4}} \tfrac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} y^{-\frac{3}{4}} dy \right] = \frac{1}{4\beta} = \underline{\underline{\frac{kT}{4}}}$$

Middelenergi for N uavhengige partikler er

$$U = N\left(\frac{kT}{2} + \frac{kT}{4}\right) = \frac{3}{4}NkT,$$

og varmekapasitet

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \underline{\underline{\frac{3}{4}Nk}}.$$

## Oppgave 3

I den store kanoniske fordeling er sannsynligheten for å finne en mikrotilstand med besettelsestall $n_1, n_2, \ldots$ gitt ved

$$P(n_1, n_2, \ldots) = e^{\beta(\Omega + \mu N - E)} = e^{\beta(\Omega + \mu \sum n_i - \sum_i \epsilon_i n_i)},$$

der $n_i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ for bosoner. Her er $\Omega$ bestemt av normeringen:

$$1 = \sum_{n_i = 0, 1, 2 \ldots} P = e^{\beta\Omega} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_1)n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{\beta(\mu-\epsilon_2)n_2} \cdots$$

$$= e^{\beta\Omega} \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_1)}} \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_2)}} \cdots$$

Dvs

$$P(n_1, n_2, \ldots) = \left[\left(1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_1)}\right) e^{\beta(\mu-\epsilon_1)n_1}\right]\left[\left(1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_2)}\right) e^{\beta(\mu-\epsilon_2)n_2}\right] \cdots$$

Middelverdien av $n_i$ blir

$$\langle n_i \rangle = \sum_{n_1, n_2, \ldots} n_i P(n_1, n_2, \ldots) = \left[1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right] \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i e^{\beta(\mu-\epsilon_i)n_i}$$

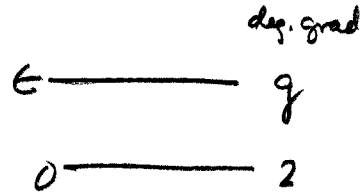
Da $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$ fås

$$\langle n_i \rangle = \left[1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right] \frac{e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}}{\left[1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}\right]^2} = \underline{\underline{\frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} - 1}}}$$

$\underline{\underline{\mu < \epsilon_1}}$ for konvergens (eller $\langle n_1 \rangle > 0$).

## Oppgave 4

Spinn-$\frac{1}{2}$ partikler er fermioner, med besettelsestall 0 eller 1 pr. tilstand.




Det gir følgende muligheter:

| | | |
|---|---|---|
| (i) | Begge partikler har energi 0. | Én slik 2-partikkeltilstand |
| (ii) | Én partikkel har energi 0, den andre energi $\epsilon$. | $2g$ slike 2-partikkel tilstander |
| (iii) | Begge partikler har energi $\epsilon$ | $\frac{1}{2}g(g-1)$ slike 2-partikkeltilstander |

Partisjonsfunksjon : $Z = 1 + 2g\, e^{-\beta\epsilon} + \frac{1}{2}g(g-1)\, e^{-2\beta\epsilon}$

Middelenergi : $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z$

$$= \epsilon \frac{2g\, e^{-\beta\epsilon} + g(g-1)\, e^{-2\beta\epsilon}}{1 + 2g\, e^{-\beta\epsilon} + \frac{1}{2}g(g-1)\, e^{-2\beta\epsilon}}$$