UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Johan S. Høye.
Tlf. 93654

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
Torsdag 12. januar 1995
kl.0900 –1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematishe Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator.

Oppgave 1

To vekselvirkende Ising spinn som befinner seg i et ytre magnetfelt $\mathscr{H}$ har energi–funksjonen

$$H(s_1,s_2) = -Js_1s_2 - hs_1 - hs_2$$

der $h = \mu_0\mu_B\mathscr{H}$ og $s_i = +1$ eller -1 . Temperaturen er T . Her er $\mu_B s_i$ det magnetiske moment langs magnetfeltet for spinn i .

a) Vis at $\langle s_1\rangle = \dfrac{\sinh(2\beta h)}{\cosh(2\beta h) + e^{-2\beta J}}$.

b) Beregn så middelverdien $\langle s_1 s_2\rangle$.

c) Ved $T = 0$ kan systemets energi $\langle H\rangle$ finnes ved direkte betraktning av $H(s_1,s_2)$ (evt. kan svarene på spørsmålene a) og b) benyttes). Hva blir $\langle H\rangle$ ved $T = 0$ når $h > 0$ og J er vilkårlig ?
[Hint: Det er 2 tilfeller avhengig av verdien på J .]

Oppgave 2

Den store kanoniske partisjonsfunksjonen er gitt ved

$$Z_g = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} Q_N$$

der z er fugasiteten og Q_N er konfigurasjonsintegralet for N partikler ($Q_0 = 1$). Trykket p og partikkeltettheten ρ er da

$$\beta p = \frac{1}{V} \ln Z_g$$
$$\rho = z \frac{\partial(\beta p)}{\partial z}$$

der V er volumet, $\beta = 1/kT$. Ved å eliminere z mellom disse 2 likningene finner en

$$\beta p = \rho + B_2\rho^2 + \ldots\ldots$$

der B_2 er andre virialkoeffisient.

Vis ved å benytte uttrykkene ovenfor at B_2 er gitt ved

$$B_2 = \tfrac{1}{2} \int d\vec{r}[1 - e^{-\beta\phi(r)}]$$

der $\phi(r)$ er vekselvirkningen mellom par av partikler og $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ er relativavstanden mellom partiklene.

b) Et system har parpotensialet

$$\phi(r) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ \epsilon((\frac{\sigma}{r})^{12} - (\frac{\sigma}{r})^6) & r > \sigma \end{cases}$$

En ønsker å bestemme den andre virialkoeffisienten B_2.

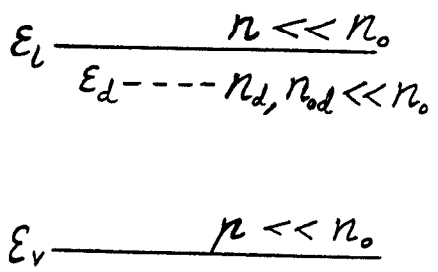
En kan rekkeutvikle for små β og finner

$$B_2 = A + B\beta + \ldots\ldots$$

Bestem koeffisientene A og B.

Oppgave 3

a)



I en halvleder er antallstettheten av kvantetilstander for elektroner lik n_0 både i ledningsbåndet og valensbåndet.

Antallstettheten av elektroner i ledningsbåndet er n, mens antallstettheten av hull (manglende elektroner) i valensbåndet er p . Anta for enkelhets skyld at alle tilstandene i ledningsbåndet har energien ϵ_ℓ mens i valensbåndet har de energien ϵ_v . Utled pn–relasjonen

$$pn = n_i^2$$

for denne halvlederen, og bestem n_i^2 når en antar $n,p << n_0$.

b) Ved doping av halvlederen tilføres donornivåer med energi ϵ_d der tettheten av kvantetilstander er n_{0d} og tettheten av elektroner er n_d .
Ved temperaturen T=0 er alle donornivåene fylt med elektroner slik at $n_d = n_{0d}$.
For $T > 0$ vil disse elektronene delvis gå over til ledningsbåndet, og en ønsker å bestemme tettheten av elektroner n i ledningsbåndet. Ved dopingen vil p bli neglisjerbar i forhold til n ($p << n$) slik at en kan anta at alle elektronene i valensbåndet kommer fra donornivåene. Benytt dette til å bestemme n når det antas at $n_{0d} << n_0$ (dvs. $n << n_0$ som tidligere, men n behøver ikke være liten i forhold til n_{0d}).

Oppgitt: Fermifordelingen

$$f(\epsilon) = \frac{e^{\beta(\mu-\epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu-\epsilon)}} .$$