INSTITUTT FOR FYSIKK,
NTNU

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Johan S. Høye.
Tlf. 93654

EKSAMEN I FAG 74315 STATISTISK MEKANIKK
Onsdag 6.august 1997
kl.0900–1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematishe Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator.

Oppgave 1

a) Et Ising spin system i ytre magnetfelt $\mathscr{H}$ har energi

$$H = -h \sum_{i=1}^{N} s_i + U(s_i, \ldots, s_N)$$

der $s_i = \pm 1$, $h = \mu_0 \mu_B \mathscr{H}$, μ_0 er permittivitet i vakuum og μ_B er Bohr–magneton. For et system bestående av et stort antall N slike vekselvirkende spinn på et regulært gitter i likevekt med temperatur T gjelder fluktuasjonsteoremet

$$\frac{\partial m}{\partial h} = a \sum_j \Gamma_{ij}$$

der $m = \langle s_i \rangle$ og $\Gamma_{ij} = \langle (s_i - m)(s_j - m) \rangle$.

Vis dette teoremet, og bestem størrelsen a . [Hint: Sett opp partisjonsfunksjonen og deriver.]

b) Den endimensjonale Ising–modellen med nærmeste nabo vekselvirkning $-J\, s_i s_j$ har tilstandslikningen

$$m = \frac{\sinh(\beta h)}{(\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J})^{\frac{1}{2}}}$$

Spinnkorrelasjonsfunksjonen til denne modellen er av formen

$$\Gamma_{ij} = c\, u^{\,n} \qquad \text{med } n = i-j$$

der n er heltall. Bestem størrelsene c og u for $h = 0$, når resultatet fra pkt. a) og verdien til $\Gamma_{ii} = \langle (s_i - m)^2 \rangle$ benyttes.

[Hint: Bestem først Γ_{ii}.]

Oppgave 2

a) Et klassisk mekanisk system kan beskrives som et punkt i et mangedimensjonalt faserom der generaliserte koordinater q_i og impulser p_i er koordinatene. For et ensemble av identiske system vil det bli et kontinuum av punkter i faserommet som kan beskrives ved tetthetsfordeling $w = w(\{q_i, p_i\})$ der $i=1,2,\ldots\ f$ står for alle koordinatene. For w gjelder kontinuitetslikningen (dvs. bevarelse av sannsynlighet eller antall punkter i faserommet)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}(\dot{q}_i w) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\dot{p}_i w) = 0$$

(med summenkonvensjonen underforstått, dvs. Σ_i).

De tidsderiverte q_i og p_i er videre bestemt av Hamiltons bevegelseslikninger

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

der Hamiltonfunksjonen $H = H(\{q_i, p_i\})$.

Vis at strømningen i faserommet er inkompressibel, dvs. vis at

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial w}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial w}{\partial p_i} = 0\,.$$

b) Basis for klassisk statistisk mekanikk er stasjonær strømning i faserommet. Vis at den kanoniske fordelingen

$$w = e^{-\beta H}$$

gir en slik stasjonær strømning, dvs. $\frac{dw}{dt} = 0$ er oppfylt.

Oppgave 3

En gass består av treatomige molekyl. De tre atomene ligger i en trekant slik at molekylene har treghetsmoment og kan rotere om alle tre akser i rommet. Rotasjonsbevegelsen har dermed 3 frihetsgrader (i motsetning til 2 frihetsgrader for 2–atomige molekyl.) Mellom de 3 atomene i molekylet virker det også 3 "fjærkrefter" slik at den indre bevegelsen til molekylet kan betraktes som 3 harmoniske oscillatorer. Anta at disse oscillatorene har omtrent samme egenfrekvens ω_0 slik at karakteristisk temperatur $T_0 = \hbar\omega_0/k$ ligger over romtemperatur.

Skisser kvalitativt hvordan varmekapasiteten pr. molekyl ved konstant volum C_V til en gass bestående av slike 3–atomige molekyl vil variere med temperaturen. Gjør kort rede for de ulike bidragene til C_V og angi deres størrelse.

Oppgave 4

Deuteriumatomer (D) er bosoner med kjernespinn s=1. Disse atomene danner de diatomiske molekylene D_2 som har totalt kjernespinn $s_t = 0,1$ eller 2 med tilhørende degenerasjonsgrad henholdsvis 1,3 eller 5. Den resulterende spinnbølgefunksjonen for de 2 D–atomene i hvert molekyl er symmetrisk i de 2 partiklenes spinnkoordinater når $s_t = 0$ eller 2 mens den er antisymmetrisk når $s_t = 1$.

Ved rotasjon av disse molekylene oppstår kvantemekaniske rotasjonsnivåer for energien. Symmetrikrav når identiske partikler opptrer i samme molekyl, vil påvirke vektleggingen av disse rotasjonsnivåene. Bestem hvordan odde og like verdier av kvantetallet ℓ for den totale rotasjonsdreieimpulsen vektlegges (bortsett fra Boltzmannfaktoren) for D_2–molekylet, og skriv ned partisjonsfunksjonen for rotasjonsbevegelsen Z til et slikt molekyl.

Oppgitt: $E_\ell = \frac{\hbar}{2I}\ell(\ell+1)$.

Oppgave 5

En klassisk partikkel beveger seg i det 3–dimensjonale potensialet

$$U(r) = ar^{\alpha}$$

der r er radialavstanden og $a > 0$ er en konstant. Eksponenten $\alpha > 0$. Beregn bidraget til spesifikk varme C fra potensialet $U(r)$ når partikkelen er i termisk likevekt.