NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Steinar Raaen
Tlf: 93635/93476

EKSAMEN I FAG 74315 - STATISTISK MEKANIKK
Torsdag 6. august 1998
kl. 0900-1300
Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

Et sett av N ikke-vekselvirkende ladede partikler som beveger seg i én dimensjon med ladning q og masse m i et elektrisk felt $\mathcal{E}|x|$, har en Hamilton-funksjon gitt ved

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{q\mathcal{E}}{2} x_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{N} H_i$$

hvor q og $\mathcal{E}$ er positive konstanter som antas kjente, og (x_i, p_i) er partikkel nummer i sin posisjon og impuls. Systemets utstrekning er slik at $-L < x_i < L$.

a) Beregn systemets kanoniske partisjonsfunksjon Z

$$Z = \frac{1}{h^N N!} \prod_{i=1}^{N} \left[\int_{-L}^{L} dx_i \int_{-\infty}^{\infty} dp_i \; e^{-\beta H_i} \right] = e^{-\beta F}$$

hvor $\beta = 1/k_B T$, h er Planck's konstant, k_B er Boltzmann's konstant, T er temperaturen, og F er systemets frie energi.

b) Finn systemets tilstandsligning

$$p = k_B T \; \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$$

Sammenlign med ideell gass lov $pV = N k_B T$, og gi en fysisk tolkning av svaret du finner.

c) Finn indre energi U og varmekapasitet C_V i grensen $L \to \infty$

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}; \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

d) Hvor stort blir potensialleddet i H sitt bidrag til C_V per partikkel? Begrunn svaret.

Oppgave 2

En ikke-relativistisk ideell kvantegass i 2 dimensjoner har en fugasitetsutvikling for tetthet og trykk gitt ved

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\Lambda^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{l-1}}{l}\;z^l \\ \beta p &= \frac{1}{\Lambda^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{l-1}}{l^2}\;z^l\end{aligned}$$

hvor $\Lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ er termisk de Broglie-bølgelengde, $\hbar = h/2\pi$ hvor h er Planck's konstant, m er partiklenes masse, $\beta = 1/k_B T$, T er systemets temperatur, k_B er Boltzmann's konstant, og fugasiteten z er gitt ved $z = \exp(\beta\mu)$, hvor μ er kjemisk potensial. I hele oppgaven gjelder det øverste fortegnet for bosoner, det nederste for fermioner.

a) Finn 2. og 3. virialkoeffisient $B_2(T)$ og $B_3(T)$ for 2-dimensjonale ideelle kvantegasser ved direkte invertering av fugasitets-rekkene for tetthet og trykk.

b) Det kan antas kjent at tilstandsligningen kan skrives som

$$\beta p = \pm\int_0^{\rho} d\rho'\;\frac{\rho'\Lambda^2}{e^{\pm\rho'\Lambda^2}-1}$$

I denne oppgaven er det hensiktsmessig å bruke identiteten

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\frac{x^n}{n!}$$

hvor $A_0 = 1, A_1 = -1/2$, $A_2 = 1/6, A_3 = 0$, $A_4 = -1/36$ etc. Videre er det slik at alle tall $A_{2n+1} = 0$, $n = 1, 2, 3..$ Bruk dette til eksakt beregning av trykk-differensen mellom en ideell fermion-gass og en ideell boson-gass i 2 dimensjoner.

c) Det oppgis at tettheten ρ og den indre energi $\mathcal{E}$ for 2-dimensjonale kvantegasser er gitt ved

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^{\infty}\frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\mp 1} \\ \mathcal{E} &= \frac{\beta}{\Lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{d\varepsilon\;\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\mp 1}\end{aligned}$$

Bruk dette til å beregne indre energi for fermiongassen ved $T = 0$ uttrykt ved ρ. Gi derved en fysisk tolkning av svaret du fant i oppgave b).

Oppgave 3

Gittervibrasjonene i et tredimensjonalt krystall med N gitterpunkt gir et bidrag til kanonisk partisjonsfunksjon Z til krystallet gitt ved

$$\ln Z = -\sum_{i=1}^{3N} \ln\Big[2\sinh(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2})\Big]$$

hvor det summeres over alle mulige svingemoder i.

a) Vis at den indre energien U for systemet kan skrives

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \frac{\hbar\omega}{2}\ g(\omega)\ \coth(\beta\hbar\omega/2)$$

Hva representerer uttrykket for U i grensen $T \to 0$?

b) Funksjonen $g(\omega)$ modelleres med formen

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{3N(\gamma+1)}{\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\gamma}; 0 < \omega < \omega_0 \\ &= 0; \text{ellers} \end{aligned}$$

hvor γ er en positiv konstant, og ω_0 er en kjent frekvens. Det oppgis at systemets varmekapasitet ved konstant volum V kan skrives

$$C_{\mathrm{V}} = \frac{3N\ (\gamma+1)\ k_B}{A^{\gamma+1}} \int_0^A dx\ \frac{x^{\gamma+2}}{\sinh^2(x)}$$

hvor $A = \beta\hbar\omega_0/2$.

d) Finn eksplisitte uttrykk for varmekapasiteten når $A << 1$ og $A >> 1$.

e) Hva skjer med C_V ved lave temperaturer, når γ reduseres? Gi en forklaring på dette med utgangspunkt i $g(\omega)$.

Oppgitt:

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} e^{-Bx^2}\, dx &= \sqrt{\frac{\pi}{B}}\, \Phi(\sqrt{B}\ L) \\
\lim_{B\to\infty} \Phi(\sqrt{B}\ L) &= 1 \\
\lim_{B\to 0} \Phi(\sqrt{B}\ L) &= 2\ L \sqrt{\frac{B}{\pi}} \\
\int_0^\infty dx\, \frac{x^{\nu+2}}{\sinh^2(x)} &= \frac{1}{2^{\nu+1}}\, \Gamma(\nu+3)\ \zeta(\nu+1) \\
\Gamma(x) &= \int_0^\infty dt\ t^{x-1}\ e^{-t} \\
\Gamma(x+1) &= x\ \ \Gamma(x) \\
n!(n+1) &= (n+1)! \\
\zeta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \\
\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots. \\
\frac{d\coth(x)}{dx} &= -\frac{1}{\sinh^2(x)} \\
\sum_{n=1}^{\infty} a^n &= \frac{a}{1-a} \\
\int_0^\infty dt\ e^{-at} &= \frac{1}{a}; \quad a > 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-at^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad a > 0 \\
\ln(1+x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l}\ x^l \\
\int \frac{dx}{1+x} &= \ln(1+x) + \mathrm{C} \\
\sum_i f(\omega_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\sum_i \delta(\omega-\omega_i)\right] f(\omega) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Funksjonene $\Phi(x)$, $\Gamma(x)$ og $\zeta(x)$ kan antas kjente der man måtte få bruk for dem.