Oppgave 1

a) $$h(\varepsilon) = \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \;\delta\left(\varepsilon - E_0|k|^{\nu}\right)$$

$$=$$

Innfør ny variabel:

$$x = E_0|k|^{\nu} \Rightarrow |k| = \left(\frac{x}{E_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$dk = \frac{1}{\nu}\frac{1}{E_0^{1/\nu}}\, x^{\frac{1}{\nu}-1}\, dx$$

$$h(\varepsilon) = \frac{2\cdot L}{2\pi}\frac{1}{\nu}E_0^{-\frac{1}{\nu}}\int_0^{\infty} dx\;\delta(\varepsilon - x)\, x^{\frac{1}{\nu}-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{L}{\pi}\frac{1}{\nu}\frac{1}{E_0^{1/\nu}}\,\varepsilon^{\frac{1}{\nu}-1}; & \varepsilon > 0 \\ 0; & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$: Vi kan omskrive litt:

$$h(\varepsilon) = \underline{\underline{\frac{LE_0^{-1}}{\nu\pi}\left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^{\frac{1}{\nu}-1}}}$$

$$H(\varepsilon) = \int^{\varepsilon} d\varepsilon' \, h(\varepsilon')$$

$$= \begin{cases} \frac{L}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^{\frac{1}{\nu}} & ; \quad \varepsilon > 0 \\ 0 & ; \quad \varepsilon < 0 \end{cases}$$

b) Oppgitt:

$$\beta p V = \beta \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \, \frac{H(\varepsilon) z}{e^{\beta \varepsilon} \pm z}$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \, \frac{h(\varepsilon) \, \varepsilon \, z}{e^{\beta \varepsilon} \pm z}$$

Siden $\quad h(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \frac{dH}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon$

$$= \frac{1}{\nu} H(\varepsilon),$$

finner vi:

$$\beta p V = \beta \cdot \nu \cdot U \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{pV = \nu U}}$$

c)

Finner først βp, deretter ρ v.h.a.

$$\rho = z\frac{\partial(\beta p)}{\partial z},$$ som innsatt

at $\underline{\underline{C_{lv} = l \cdot d_{lv}}}$

$$\beta p L = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; \frac{H(\varepsilon) z}{e^{\beta\varepsilon} \pm z}$$

Bruk funksjonsuttrykket for $H(\varepsilon)$:

$$\beta p = \beta \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{\beta\varepsilon} \pm z\right)^{-1}$$

$$= \frac{z}{\pi E_0^{1/2}} \beta \int_0^{\infty} d\varepsilon \; \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\beta\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\mp z e^{-\beta\varepsilon}\right)^l$$

$$= \frac{z}{\pi E_0^{1/2}} \beta \sum_{l=0}^{\infty} (\mp z)^l \int_0^{\infty} d\varepsilon \; \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\beta\varepsilon(1+l)}$$

Innfør $x = \beta\varepsilon(1+l) \Rightarrow$

$$d\varepsilon = \frac{dx}{\beta(1+l)}$$

$$\beta\rho = \frac{z}{\pi E_0^{1/\nu}}\beta \sum_{l=0}^{\infty} (\mp z)^l \left[\frac{1}{\beta(1+l)}\right]^{\frac{1}{\nu}+1} \underbrace{\int_0^{\infty} dx\, x^{\frac{1}{\nu}} e^{-x}}_{=\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)}$$

$$= \frac{\beta\,\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)}{\beta^{\frac{1}{\nu}+1} E_0^{\frac{1}{\nu}}\,\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (\mp 1)^l \frac{z^{l+1}}{(1+l)^{\frac{1}{\nu}+1}}$$

$$= \frac{\beta\,\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)}{\beta^{\frac{1}{\nu}+1}\,\pi\, E_0^{1/\nu}} \sum_{l=1}^{\infty} (\mp 1)^{l-1} \frac{z^l}{l^{\frac{1}{\nu}+1}}$$

$$= \frac{1}{R_\nu} \sum_{l=1}^{\infty} d_{l\nu}\, z^l, \quad \text{hon}$$

$$R_\nu = \frac{\pi\, E_0^{1/\nu}\, \beta^{\frac{1}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}+1\right)}; \quad d_{l\nu} = \frac{(\mp 1)^{l-1}}{l^{\frac{1}{\nu}+1}}$$

Dismed has vi egsi at

$$C_{l\nu} = \frac{(\mp 1)^{l-1}}{l^{\frac{1}{\nu}}}$$

Sjekk:

Dersom vi setter $v = 2$, $\hbar = \frac{\hbar^2}{2m}$,

får vi

$$Rv = \frac{\pi \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \beta^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{2m}} \frac{h}{2\pi} \beta^{1/2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} = \Lambda =$$ termisk de-Broglie bølgelengde.

Dette er korrekt uttrykk for det ikke-relativistiske, en-dimensjonale, tilfellet.

d) Bose-tilfellet:

$$\rho = \frac{1}{Rv} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{1}{2}}}$$

B-E-kond. : $\mu = 0 \Rightarrow z = 1$

Rekken for ρ diverger, dvs. ρ kan bli ρ vilkårlig stor, i strid med BEK, dersom $\underline{\underline{v \geq 1}}$

BEC: $\underline{\underline{v < 1}}$

e) $\nu < 1 \Rightarrow$ mulighet for BEC.

$$L\rho = \langle N_{tot}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \, \frac{h(\varepsilon) z}{e^{\beta\varepsilon} - z}$$

$$= \sum_k \frac{z}{e^{\beta\varepsilon_k} - z}$$

Her bruker vi funksjon.

$$\langle N\rangle = \langle N_0\rangle + \widetilde{N_s}$$

$$= \langle N_0\rangle + L \cdot \frac{1}{R\nu} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{1/\nu}}}_{\zeta\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

$$\langle N\rangle = \langle N_0\rangle + \frac{L}{R\nu} \zeta\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

Rv: T-avhengig. BEC skjer der hvor

$$\frac{\langle N_0\rangle}{\langle N\rangle}$$ begynner å

ta en verdi:

$$\frac{\langle N_0 \rangle}{\langle N \rangle} = 1 - \underbrace{\frac{L}{\langle N \rangle}}_{= \frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\xi(1/\nu)}{R\nu}$$

$T\lambda$:

$$\rho = \frac{\xi(1/\nu)}{R\nu}$$

$$R\nu = \frac{\xi(1/\nu)\,\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)}{\pi\, E_0^{1/\nu}} (k_B T\lambda)^{1/\nu}$$

$$k_B T\lambda = E_0 \left\{ \frac{\pi \rho}{\xi(\frac{1}{\nu})\,\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)} \right\}^{\nu} ; \nu < 1$$

$$k_B T\lambda = 0 \quad ; \quad \nu \geq 1$$

e) $$\rho = z \frac{\partial(\beta p)}{\partial z}$$

$$\beta p = \int_0^z dz' \, \frac{\rho(z')}{z'}$$

For i finn βp s.f.a. ρ, må z eliminere til fordel for ρ. For tilfellet $\nu = 1$, har relasjon for $\rho(z)$ summen eksakt, og direkte inversjon, slik at vi finner $z = z(\rho)$ eksplisitt, og derfra direkte i integralet for βp.

$$\rho(z) = \frac{1}{R_1} \sum_{l=1}^{\infty} (\mp 1)^{l-1} \frac{z^l}{l}$$

$$= \frac{\pm}{R_1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (\pm z)^l$$

$$= \frac{\pm}{R_1} \ln(1 \pm z)$$

$$\ln(1 \pm z) = \pm R_1 \rho$$

$$1 \pm z = e^{\pm R_1 \rho}$$

$$z = \pm \left(e^{\pm R_1 \rho} - 1 \right)$$

$$dz = \pm (\pm R_1) \; e^{\pm R_1 \rho} \, d\rho$$

$$\beta p = R_1 \int_0^{\rho} d\rho' \; \frac{e^{\pm R_1 \rho'} \, \rho'}{\pm \left(e^{\pm R_1 \rho'} - 1 \right)}$$

$$= \pm \int_0^{\rho} d\rho' \; \frac{\rho' R_1}{1 - e^{\mp R_1 \rho'}}$$

$$= \mp \int_0^{\rho} d\rho' \; \frac{\rho' R_1}{e^{\mp R_1 \rho'} - 1}$$

Øverste fortegn: Fermion.
Nederste —"— : Boson.

Legg merke til at fortegnene kombineres, slik at dette blir positivt.

f)
$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} x^n$$

$$(\beta p)_F = \int_0^{\rho} d\rho' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} (-\rho' R_1)^n$$

$$(\beta p)_B = \int_0^{\infty} d\rho' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} (\rho' R_1)^n$$

Vi kan regne ut trykk-differensen på flere måter:

c)
$$(\beta p)_F - (\beta p)_B$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} R_1^n \int_0^{\rho} d\rho' \, \rho'^n \underbrace{\left[(-1)^n - 1\right]}_{\Rightarrow n = 0,2,4\ldots \text{ bidrar kun}}$$

Bare odde n bidrar til sum. Men det betyr ut, siden kun $C_1 \neq 0$, for $C_1, C_3, C_5 \ldots$ får vi:

$$(\beta p)_F - (\beta p)_B$$

$$= \underbrace{C_1}_{=-\frac{1}{2}} R_1 (-2) \cdot \frac{\rho^2}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{R_1}{2} \rho^2}}$$

Trykket i fermion-gassen er større enn i bosongassen, p.g.a. Pauli-prinsippets effektive frastøting på kort rekkevidde

ii) Mer direkte måte, uten å bruke ~~Euler~~ Bernoulli-tall

$$(\beta p)_F - (\beta p)_B$$

$$= \int_0^\rho d\rho' \left(\frac{-x}{e^{-x}-1} - \frac{x}{e^{x}-1} \right)$$

$$= - \int_0^\rho d\rho' \; x \cdot \frac{\left[e^{x} - 1 + e^{-x} - 1 \right]}{(e^{-x}-1)(e^{x}-1)}$$

$$= - \int_0^{\rho} d\rho' \times \underbrace{\left(\frac{e^{x} + e^{-x} - 2}{2 - e^{x} - e^{-x}} \right)}_{=-1}$$

$$= R_1 \int_0^{\rho} d\rho' \, \rho' = \underline{\underline{\frac{R_1}{2} \rho^2}}$$

~~[illegible]~~ Virial koeffisienter:

$$\beta p = \int_0^{\rho} d\rho' \frac{(\mp R_1 \rho')}{e^{\mp R_1 \rho'} - 1}$$

$$= \int_0^{\rho} d\rho' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} (\mp R_1 \rho')^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\mp R_1)^n \frac{C_n}{n!} \frac{1}{n+1} \rho^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \frac{C_{n-1}}{n!} R_1^{n-1} \rho^n$$

$$B_n = (\mp 1)^{n-1} \frac{C_{n-1} R_1^{n-1}}{n!}$$

Oppgave 2

a) $W(\{p_i, q_i\}) = W(H(\{p_i, q_i\}))$ for stasjonært system i termisk likevekt.

b) i) Mikrokanonisk: Termisk og mekanisk isolerte system, Fiksert volum V, antall partikler, N og total energi, E

$$W(H) \sim \delta(E - H)$$

ii) Kanonisk: Mekanisk isolerte systemer i termisk likevekt med omgivelser.
Fiksert volum V, antall partikler N, og temperatur T.

$$W(H) \sim e^{-\beta H}$$

$$\beta = (k_B T)^{-1}$$

iii) Stort kanonisk: Systemet i termisk likevekt med omgivelser, som kan utveksle partikler med omgivelsene.
Fiksert volum V, temperatur T, og kjemisk potensial μ

$$W(N,H) \sim \underline{\underline{e^{-\beta(H-\mu N)}}}$$

d)
$$Z = \sum_{\{\text{Frihetsgrader}\}} e^{-\beta H(\{\text{Frihetsgrader}\})}$$

$e^{-\beta H}$ for en gitt konfig. er en analytisk funksjon av T.

En endelig sum av analytiske funksjoner, er selv en analytisk funksjon.

For et endelig antall frihetsgrader, blir dermed Z analytisk $\Rightarrow$

All termodynamikk i systemet blir analytisk m.h.p. T $\Longrightarrow$

Ingen faseovergang, fordi en faseovg. viser seg som ikke-analytisitet i termodynamiske funksjoner, m.h.p. T.

d) $$Z = \prod_{i=1}^{N} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_i \, e^{\beta h \cos\varphi_i} \right]$$

Partisjonsfunksjon faktoriserer, fordi spinnene er uavhengige

$$\underline{\underline{Z = \left[2\pi \, I_0(\beta h) \right]^N}}$$

ved bruk av oppgitt formel.

e) $$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[I_0(\beta h) \right]$$

$$= -N h \frac{I_0'}{I_0}$$

$\beta h \gg 1$

$$I_0(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

$$I_0'(x) \simeq I_0 - \frac{I_0}{2x}$$

$$\frac{I_0'}{I_0} \simeq 1 - \frac{1}{2x}$$

$$\underline{\underline{U \simeq -Nh\left(1 - \frac{k_B T}{2h}\right)}}$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \underline{\underline{\frac{N k_B}{2}}}$$

$\frac{C}{N} = \frac{k_B}{2}$ i hvert hold til ekvipartisjonsprinsippet: En kvadratisk frihetsgrad i H bidrar $\frac{k_B}{2}$ til spesifikk varme.

Ved lave T vil hvert spinn i stor grad være rettet inn langs $\vec{h}$-feltet, dvs. x-akse $\Rightarrow$ $\{\varphi_i\}$ er små. Vi kan dermed utviklingsutvikle hver av cos-funksjonene:

$$\cos\varphi_i \simeq 1 - \frac{\varphi_i^2}{2},$$

slik at ved lave T, fremviser hvert spinn en kvadratisk frihetsgrad.

f) Ising spins

$$Z = \prod_{i=1}^{N} \left(e^{\beta h} + e^{-\beta h}\right)$$

$$= \left[2 \cosh(\beta h)\right]^N$$

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -Nh \tanh(\beta h)$$

$$C = k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z$$

$$= +N k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[\ln \cosh(\beta h)\right]$$

$$= N k_B (\beta h)^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \tanh x}_{\frac{1}{\cosh^2 x}} \; ; \; x = \beta h$$

$$= N k_B \left\{\frac{\beta h}{\cosh(\beta h)}\right\}^2$$

$\beta h \gg 1$:

$$\frac{C}{N} \simeq k_B \, (\beta h)^2 e^{-2\beta h}$$

Varmekapasitet forsvinner eksponensielt ved lave T:

vi får <u>intet</u> bidrag $\frac{k_B}{2}$ fra hvert spin, ved lave T.

Dette skyldes at Ising-spin ikke har de <u>små</u> fluktuasjoner rundt <u>grunntilstanden</u> i motsetning til XY-spin. Ising systemet har derfor <u>ingen</u> kvadratiske frihetsgrader, og dette forklarer forskjellen i lavtemp.-resultat mellom Ising og XY-spinn.