Eksamen, 74316 Elektromagnetisk teori, (vår 1989)

LØSNINGSSKISSE

Oppgave 1

a)

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2\underline{r}\cdot\underline{r}')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r}\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^2}+\cdots\right)$$

Monopolbidrag p.g.a. nettoladning Q:

$$Q/(4\pi\epsilon_0 r) = \int dv'\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{r}\rho(\underline{r}')dv'$$

Dipolbidrag

$$\int\frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\rho(\underline{r}')(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,dv' = \frac{\underline{r}\cdot\underline{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Dipolmomentet er lik

$$\underline{p} = \int\rho(\underline{r})\,\underline{r}\,dv$$

b) Innfører fordeling av dipoltettlet $\underline{P}(\underline{r})$:

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\int\rho(\underline{r}')\frac{dv'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}+\int\frac{\underline{P}(\underline{r}')\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}dv'\right)$$

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\int\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}dv'+\int\underline{P}(\underline{r}')\nabla'\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)dv'\right) \qquad (1)$$

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\int\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}dv' + \Big[\quad\Big]_{\text{"}-\infty\text{"}}^{\text{"}+\infty\text{"}} - \int dv'\frac{\nabla'\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

Definerer

$$\rho' = \rho - \nabla\underline{P}$$

„fri" ladningstetthet

„ufri" tetthet

∇:

$$\nabla\underline{E} = (\rho-\nabla\underline{P})/\epsilon_0$$

$$\underline{D} = \epsilon_0\underline{E}+\underline{P}$$

$$\nabla\underline{D} = \rho$$

c) Grensebetingelser for potensialet innenfor (<) og utenfor (>) $r=R$:

$$\varphi_<(R) = \varphi_>(R) \qquad (2)$$

$$\epsilon\frac{\partial\varphi_<(R)}{\partial r} = \frac{\partial\varphi_>}{\partial r} \qquad (3)$$

②

d) Siden $\varphi_>$ og $\varphi_<$ er endelig, og siden $\cos\theta = P_1$ vil

$$\varphi_< = \sum_{n,m} a_{nm} r^n P_n(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi}$$

$$\varphi_> \sum_{n,m} b_{nm} r^{-1-n} P_n(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} - E_0 r P_1(\cos\theta)$$

På grunn av asimutal symmetri vil $m=0$. Siden det induserte feltet umulig kan variere kvikkere som funksjon av θ enn det ytre feltet faller høyere harmoniske $n>1$ bort

$$\varphi_< = a_0 + r P_1(\cos\theta) a_1$$

$$\varphi_> = b_0/r + (b_1/r^2) P_1(\cos\theta) - E_0 r P_1(\cos\theta)$$

Av (2) og (3) følger det at

$$a_0 + R P_1(\cos\theta) a_1 = b_0/R + (b_1/R^2) P_1(\cos\theta) - E_0 R P_1(\cos\theta)$$

$$\epsilon a_1 P_1(\cos\theta) = -b_0/R^2 - 2(b_1/R^3) P_1(\cos\theta) - E_0 P_1(\cos\theta)$$

Dette krever $b_0 = 0$, $a_0 = 0$ og

$$\varphi_< = -\frac{3}{\epsilon+2} E_0 r \cos\theta$$

$$\varphi_> = E_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 \frac{1}{r^2}\cos\theta - E_0 r \cos\theta$$

Inne i kula er det indusert et uniformt motfelt. Langt unna kula er feltet lik E_0. For $r>R$ er feltet en superposisjon av det faste ytre feltet og et indusert dipolfelt.

e) Av (1) følger det at

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv'\, \underline{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla'\cdot\left(\frac{\underline{P}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S d\underline{S}'\cdot\frac{\underline{P}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

f) Feltene må bli like når magnetiseringen er lik i de to materialene. Dette kommer av at vi ikke har frie strømmer; problemet blir ekvivalent med situasjonen skissert i e) hvor potensialet er skalart. (Maxwells likninger blir symmetriske for elektr. og magn. felt.)

Oppgave 2

a)

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \dot{\underline{D}}$$

$\Rightarrow$:

$$\nabla \cdot \dot{\underline{D}} = \dot{\rho}$$

Dessuten gjelder

$$\nabla \cdot \underline{J} + \nabla \cdot \dot{\underline{D}} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{H})$$

$\Rightarrow$:

$$\nabla \cdot \underline{J} + \dot{\rho} = 0 \qquad (1)$$

fordi divergensen til et curl-felt er lik null.

b)

Skriver (1) som

$$c^{-1} \nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial}{\partial(ct)}(\rho) = 0$$

som er en kovariant form. Får 4-strømmen

$$J^{\alpha} = (\underline{J}\, c^{-1}, \rho) \qquad (2)$$

Denne transformerer som

$$J'^{\alpha} = Q^{\alpha}_{\ \beta} J^{\beta}$$

når vi går fra hvilerammen til observatørens referansesystem. Hvis lederen ligger langs x-aksen og $\beta = v/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ blir Lorentz-transformasjonen

$$Q = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

I (2) har vi

$$|\underline{J}| = e n_- \bar{u} = J_x \qquad \rho = e(n_+ - n_-) \qquad (3)$$

Dette gir

$$J_x' = \gamma (J_x - \beta c \rho) \qquad \rho' = \gamma (\rho - c^{-1}\beta J_x) \qquad (4)$$

Observatøren observerer ledningsstrømmen $J'_\alpha A$.

c) Det følger at $n_+ = n_-$ og $\underline{u} = \underline{0}$.

d) En kontravariant indeks settes lik en kovariant indeks med etterfølgende summering fra 1 til 4. Rangen til vedkommende tensor reduseres derved med verdien 2.

Anvender vi dette på J'^α og $J'_\alpha = g_{\alpha\beta} J'^\beta$ får vi

$$J'_\alpha J'^\alpha = Q^{-1\beta}_{\alpha} J_\beta Q^\alpha_\gamma J^\gamma = \delta^\beta_\gamma J_\beta J^\gamma = J_\beta J^\beta$$

⸪ Normen er invariant. Vi kan derfor slutte at hvis strøm og nettoladning er lik null i et hvilket som helst inertialsystem vil ingen krefter påvirke partikkelbevegelsene. (Uansett observatørhastighet.)