

# FAG 74316 ELEKTRISITET OG MAGNETISME 2

## Løsningsforslag eksamen 13. jan 1992

### Oppgave 1:

a) Av symmetigrunner kan  $\vec{E}$ -feltet bare peke langs z-aksen, som er den eneste utvalgte retning i problemet. Gauss lov blir da

$$\frac{d}{dz} E_z(z) = \frac{\sigma}{\epsilon} [\delta(z + \frac{1}{2}d) - \delta(z - \frac{1}{2}d)]$$

Integrert, med grensebetingelsen  $E_z = 0$  for  $z = -\infty$ :

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{-\infty}^z dz' [\delta(z' + \frac{1}{2}d) - \delta(z' - \frac{1}{2}d)]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } z < -\frac{1}{2}d \\ \frac{\sigma z}{\epsilon} & \text{for } -\frac{1}{2}d < z < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{for } z > \frac{1}{2}d \end{cases}$$

b)

Potensialforskjellen  $U = \int_{-d/2}^{d/2} dz E_z(z) = \frac{\sigma d}{\epsilon}$

c)

$$U = E_z d \Rightarrow E_z = \frac{U}{d}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \underline{\sigma = \epsilon_0 E_z = \frac{\epsilon_0 U}{d}}$$

d)

$$Q = \sigma A = \frac{\epsilon_0 A}{d} U$$

$$Q = C U \Rightarrow \underline{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

e) Elektrostatisk energitettethet:  $w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \Rightarrow$

$$\text{Feltenergi } \underline{E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_z^2 A d = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2C} Q^2}$$

f) Med U konstant varierer E med  $\epsilon$  som

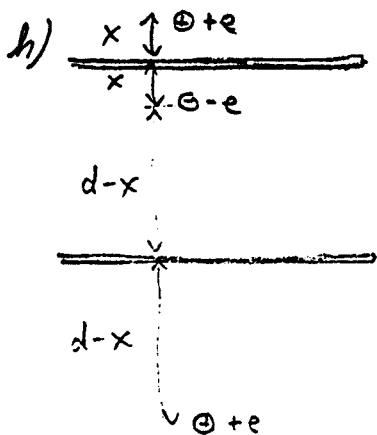
$$E \sim \epsilon$$

Dvs. at energien som er lagret i kondensatoren øker dersom  $\epsilon$  øker. Energidifferansen må komme fra det arbeidet vi utfører ved å skyve den dielektriske skiven inn mellom platene. Kraften på skiven forsøker derfor å skyve skiven ut.

g) Med Q konstant varierer E med  $\epsilon$  som

$$E \sim \epsilon^{-1}$$

Kraften på skiven forsøker derfor å trekke skiven inn.



Når elektronet er i avstand  $x$  fra den metalliske kondensatorplaten vil det (effektivt sett) være induert en positiv speilladning i avstand  $x$  bak denne. Når  $x$  blir liten nok blir den tiltrekkende kraften mellom elektronet og speilladningen større enn den frastøtende kraften fra kondensatorplaten.

[Kommentarer: i) Det som egentlig skjer er en omfordeling av ladnings tettheten på overflaten av kondensatorplaten. ii) Det vil også indueres en positiv speilladning i avstand  $d-x$  bak den andre kondensatorplaten, og et uendelig antall itererte speilladninger, men når  $x \ll d$  kan disse neglisjeres.]

i) Elektronet er i et potensial

$$V(x) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2x} - \frac{|e|U}{d}x + \text{konst.}$$

slik at kraften på det blir

$$\vec{F} = \hat{e}_z \left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2x^2} - \frac{|e|U}{d} \right]$$

som forsvinner når

$$x = \sqrt{\frac{|e|d}{8\pi\epsilon_0 U}} = \sqrt{\frac{1.60 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}}{8\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2}} \text{ m} \approx 0.85 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 850 \text{ \AA}$$

Vi har  $x \ll d$ , så det er konsistent å neglisjere de andre speilladningene.

Subtelt punkt: Speilladningsmetoden kan brukes til å finne potensialet, ikke kreftene direkte. Kraften fra speilladningene er derfor  $e^2/(4\pi\epsilon_0 2x^2)$  og ikke  $e^2/(4\pi\epsilon_0 (2x)^2)$ .

Oppgave 2:

a)  $\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} I_0 \hat{e}_z \sin[k_0(\frac{1}{2}d - |z|)] \theta(\frac{1}{2}d - |z|) * \delta(y) * [\delta(x - \frac{1}{2}x_0) e^{-i\psi} + \delta(x + \frac{1}{2}x_0) e^{i\psi}]$   $\begin{cases} k_x = \sin\vartheta \cos\phi \\ k_z = \cos\vartheta k \end{cases}$

$$= I_0 \hat{e}_z \left[ e^{-\frac{i}{2}k_x x_0 - i\psi} + e^{\frac{i}{2}k_x x_0 + i\psi} \right] * \int_{-d/2}^{d/2} dz \sin[k_0(\frac{1}{2}d - |z|)] e^{-ik_z z \cos\vartheta}$$

$$= 2 I_0 \hat{e}_z \cos\left[\frac{1}{2} \sin\vartheta \cos\phi k_0 x_0 + \psi\right] * \frac{2}{k_0 \sin\vartheta} [\cos(\frac{1}{2}k_0 d \cos\vartheta) - \cos(\frac{1}{2}k_0 d)]$$

b) Vi har

$$U(\hat{n}) \propto |j_{\perp}(\vec{k})|^2 = \sin^2\vartheta |j(\vec{k})|^2 \propto |j(k_e)|^2$$

c)  $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \vartheta = 0, \sin \vartheta = 1.$

$d$ -afhængigheden til ustrålt effekt ligger i faktoren

$$\left[ \cos\left(\frac{1}{2} k_0 d \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{1}{2} k_0 d\right) \right]_{\vartheta=\pi/2}^2 = \left[ 1 - \cos\left(\frac{1}{2} k_0 d\right) \right]^2$$

som blir størst når  $\cos\left(\frac{1}{2} k_0 d\right) = -1$ , dvs

$$\frac{1}{2} k_0 d = (2n+1)\pi = \pi, 3\pi, \dots$$

eller

$$d = \frac{(4n+2)\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{k_0}, \frac{6\pi}{k_0}, \dots$$

d)  $\varphi$ -afhængigheden til ustrålt effekt ligger i faktoren

$$\left[ \cos\left(\frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \varphi k_0 x_0 + \psi\right) \right]_{\vartheta=\pi/2}^2 = \left[ \cos\left(\frac{1}{2} \cos \varphi k_0 x_0 + \psi\right) \right]^2$$

For maksimal ustråling i  $\hat{e}_x$ -retningen ( $\cos \varphi = 1$ ) må vi ha

$$\cos\left(\frac{1}{2} k_0 x_0 + \psi\right) = \pm 1, \quad \therefore \frac{1}{2} k_0 x_0 + \psi = n\pi = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

For minimal ustråling i  $\hat{e}_y$ -retningen ( $\cos \varphi = 0$ ) må vi ha

$$\cos \psi = 0, \quad \therefore \psi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Dette betyr at vi må ha

$$\frac{1}{2} k_0 x_0 = \left(n - m - \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$x_0 = \frac{(2l+1)\pi}{k_0} = \frac{\pi}{k_0}, \frac{3\pi}{k_0}, \dots$$

e)

For maksimal ustråling i  $\hat{e}_y$ -retningen må vi ha  $\cos \psi = \pm 1$ ,  $\therefore$

$$\psi = m\pi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

For minimal ustråling i  $\hat{e}_x$ -retningen må vi ha  $\cos\left(\frac{1}{2} k_0 x_0 + m\pi\right) = 0$ , dvs.

$$\frac{1}{2} k_0 x_0 = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$x_0 = \frac{(2l+1)\pi}{k_0} = \frac{\pi}{k_0}, \frac{3\pi}{k_0}, \dots$$

(Retningsafhængigheten kan endres elektronisk ved å justere faseforholdet  $\psi$  elektronisk).

Oppgave 3:

a) De elektromagnetiske feltene  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  kan uttrykkes ved potensialene  $\Phi$  og  $\vec{A}$ :

$$\vec{E} = -(\nabla\Phi + \dot{\vec{A}}), \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Disse uttrykkene er invariante under gauge transformasjoner:

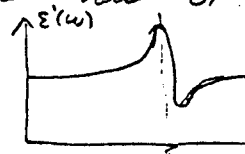
$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \Lambda, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$$

b) Ved Brewsters vinkel er det ingen refleksjon av parallell-polarisert<sup>\*)</sup> lys. <sup>\*)</sup> Dvs, når  $\vec{E}$  står normalt på reflekterende flate.

c) Kramers-Kronig relasjonene uttrykker (på integralform) en sammenheng mellom (de frekvensavhengige) real- og imaginærdelene til (f.eks.) permittiviteten

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

d) Normalt er  $\frac{d\epsilon'}{d\omega} > 0$ . Near resonanser kan vi et område med anomal dispersjon,  $\frac{d\epsilon'}{d\omega} < 0$ .



--- Område med anomal dispersjon

e) Abraham-Lorentz' ligning er en bevegelsesligning for punktpartikler som tar hensyn til strålingsreaksjonen