

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Bakke, tlf. 93646

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74316
ELEKTRISITET OG MAGNETISME 2

17. august 1999

kl. 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottmann: Matematiske Formelsammling
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Maxwells ligninger med supplerende relasjoner

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q = \iiint_V \rho \, d\tau \quad (\text{V avgrenset av S})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{S omsluttet av } \Gamma)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_c + I_d = \iint_S (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{S omsluttet av } \Gamma)$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_f + \rho_b)/\epsilon_0 = (\nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{P})/\epsilon_0 \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

I isotrope, lineære media:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Andre relasjoner $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \mathbf{J} = g\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad d\Phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad d\mathbf{F} = I \, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad U_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2p \cos\theta + \mathbf{e}_\theta p \sin\theta) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2m \cos\theta + \mathbf{e}_\theta m \sin\theta)$$

$$U_e = \sum \frac{1}{2} q_i \Phi_i \quad \Phi_i = \sum_j p_{ij} Q_j \quad U_m = \sum \frac{1}{2} I_i \phi_i \quad \phi_i = \sum_j M_{ij} I_j$$

$$L_i = \phi_{ii}/I_i \quad M_{ij} = \phi_{ij}/I_j \quad u_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r (-A_1 + 2C_1 r^{-3}) \cos\theta + \mathbf{e}_\theta (A_1 + C_1 r^{-3}) \sin\theta$$

$$\Phi = RI \quad R = \oint \frac{dL}{gA} \quad NI = \mathcal{R}\Phi \quad \mathcal{R} = \oint \frac{dL}{\mu A}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} \quad \mathbf{K} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \quad \mathbf{K} \times \mathbf{n} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad Q = \frac{\omega \epsilon}{g} = \left| \frac{\partial \mathbf{D} / \partial t}{\mathbf{J}} \right|$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad k_r = \omega (\mu \epsilon / 2)^{1/2} [(1 + 1/Q^2)^{1/2} + 1]^{1/2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad k_i = \omega (\mu \epsilon / 2)^{1/2} [(1 + 1/Q^2)^{1/2} - 1]^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{v^2} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \iiint_{\tau} \frac{[\rho] d\tau}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{\tau} \frac{\mu_0 [\mathbf{J}] d\tau}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 s} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 Q \mathbf{v}}{4\pi s} \quad s = R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rc}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 s^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 s^3 c^2} \left[\mathbf{R} \times \left\{ \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right\} \right]$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \quad \beta = v/c \quad p = h/\lambda \quad E = hf \quad p = v E/c^2 \quad E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel} \quad B_{\parallel}' = B_{\parallel} \quad \mathbf{E}_{\perp}' = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{B}_{\perp}' = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right)$$

Fysiske konstanterLyshastighet i vakuum c $3.00 \cdot 10^8$ m/sElementærladning e $1.60 \cdot 10^{-19}$ CElektronets masse m_e $9.11 \cdot 10^{-31}$ kgProtonets masse m_p $1.67 \cdot 10^{-27}$ kgPermittivitet i vakuum ϵ_0 $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/mPermeabilitet i vakuum μ_0 $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

Vektorformler

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$\nabla \times \nabla u = 0$

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$\frac{d}{d\sigma}(u\mathbf{A}) = \frac{du}{d\sigma}\mathbf{A} + u\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{d\sigma}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{d\sigma}$$

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{C}, \text{ hvor } \mathbf{C} = \text{konst.}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla u) + u(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = (\nabla u) \times \mathbf{A} + u(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

hvor:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = & \mathbf{e}_x \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \\ & + \mathbf{e}_y \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\ & + \mathbf{e}_z \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Vektoroperasjoner. Rektangulære koordinater.

$$\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vektoroperasjoner. Sylindriske koordinater.

$$\nabla u = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vektoroperasjoner. Sfæriske koordinater.

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Vektor integralformler.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\tau \quad (\text{Divergensteoremet})$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{Stokes' teorem})$$

$$\oint_S u \, d\mathbf{a} = \int_V \nabla u \, d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{a} = - \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) \, d\tau$$

$$\oint_C u \, d\mathbf{s} = - \int_S \nabla u \times d\mathbf{a}$$

$$\oint_S u \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V [\mathbf{A} \cdot (\nabla u) + u(\nabla \cdot \mathbf{A})] \, d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}) = \int_V [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})] \, d\tau$$

Formler med relative koordinater.

$$\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial x} = - \frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial x'}$$

$$\nabla f(\mathbf{R}) = - \nabla' f(\mathbf{R})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) = - \nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) = - \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{R}) = \nabla'^2 f(\mathbf{R})$$

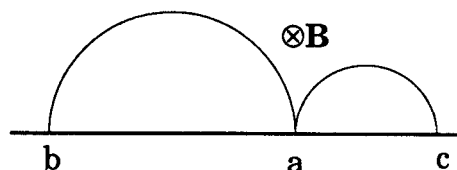
$$\nabla \mathbf{R} = - \nabla' \mathbf{R} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = - \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 0 \quad (R \neq 0)$$

Oppgave 1.

To ladede partikler, B og C, kommer samtidig inn i et magnetfelt \mathbf{B} ved punkt a i figuren. Magnetfeltet står vinkelrett på papirplanet, og peker inn i det. Partiklene har samme masse. Den ene har ladning Q og den andre $-Q$. Etter å ha beveget seg i en halvsirkel når partikkel B fram til punkt b og partikkel C når fram til punkt c.

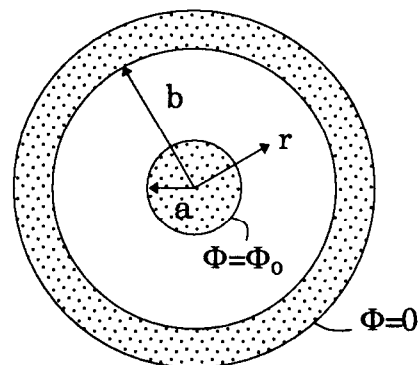


- Hvilken av partiklene har positiv ladning, og hvilken har negativ?
 - Hvilken har størst hastighet?
 - Hvilken når først fram til endepunktet?
- Begrunn svarene.

Oppgave 2.

Gitt en koaksialkabel, med en innerleder med radius a , og ytterleder med indre radius b . Tykkelsen av ytterlederen har ingen betydning. Inner- og ytterleder er ikke forbundet med hverandre. Mellom lederne er det vakuum. Kabelen er så lang at vi kan se bort fra effekter nær endene.

Mellom lederne påtrykkes en potensialforskjell Φ_0 , slik at potensialet på innerlederen er $\Phi(a)=\Phi_0$ og på ytterlederen $\Phi(b)=0$.



For å unngå forveksling med ladningstettheten ρ , benyttes r istedenfor ρ som sylinderkoordinat.

- (a) Finn \mathbf{E} -feltet og potensialet Φ over alt i rommet.

Mellomrommet mellom lederne fylles nå med romladningstetthet $\rho(r)$, slik at potensialet mellom lederne ikke lenger er som i pkt. (a), men gitt av:

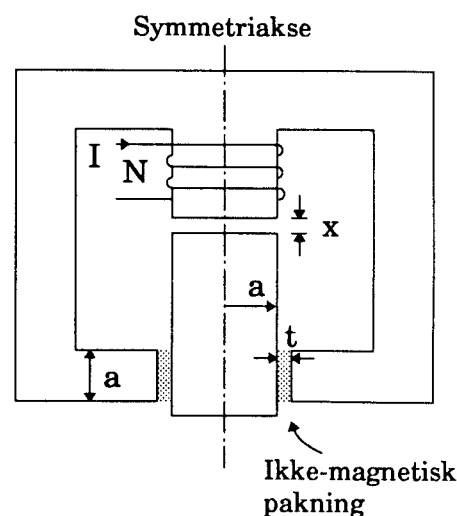
$$\Phi(r) = \Phi_0 \frac{b-r}{b-a}$$

Potensialet varierer altså lineært fra $\Phi(a)=\Phi_0$ til $\Phi(b)=0$.

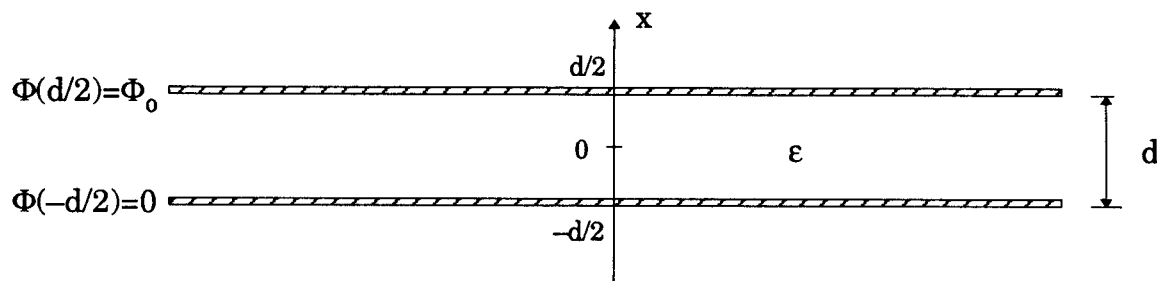
- (b) Finn $\mathbf{E}(r)$ og $\rho(r)$ i området mellom lederne.
- (c) Finn lagret elektrostatisk energi pr. lengdeenhet av koaksialkabelen, w_e .

Oppgave 3.

Figuren viser et snitt gjennom en magnetisk krets. Kjernen og stemplet har sylindersymmetri, med symmetriakse som vist. Materialet i kjernen og stempelet antas å ha uendelig permeabilitet ($\mu_r = \infty$). Gapene antas så små at \mathbf{B} -feltene i dem kan antas homogene. Antall tårn i spolen er N , og strømmen gjennom den er I .



- Beregn spolens selvinduktans L .
- Bestem B i luftgap og i pakning.
- Finn systemets totale magnetiske energi W_m .
- Stemplet glir friksjonsfritt og har masse m . Bestem strømmen I som skal til for at den magnetiske kraften akkurat skal motvirke tyngdekraften. Tyngdeakselerasjonen er g .

Oppgave 4.

Rommet mellom platene i en kondensator er fylt av et dielektrikum. Avstanden mellom platene er d og denne er mye mindre enn platenes utstrekning, slik at vi kan regne som om platene er uendelig store. Potensialforskjellen mellom platene er Φ_0 .

- Anta først at dielektrikumet har permittivitet $\epsilon_1 = \text{konstant}$.
Bestem \mathbf{E} - og \mathbf{D} -felt, polarisasjon \mathbf{P} og potensial Φ som funksjon av x .
- I det følgende skal antas at permittiviteten varierer med x etter funksjonen:

$$\epsilon_2(x) = \epsilon_0 \cdot \frac{4}{1+(x/d)^2}$$
 Vil \mathbf{D} -feltet være konstant i mellomrommet? Begrunn svaret.
Bestem de samme størrelser som i pkt. (a).
- Bestem den bundne romladningstettheten ρ_b inne i det dielektriske materialet, og bundet flateladningstetthet σ_b ved kondensatorplatene.