NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
J. S. Høye, tel. 93654

EKSAMEN I FAG 74326 KVANTEMEKANIKK 2

Fredag 29. august 1997
kl. 0900-1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel uttrykk, formler og konstanter er gitt i eget vedlegg.

Oppgave 1

La egentilstandene for spinnoperatoren S_z for en spinn-$\frac{1}{2}$ partikkel være $|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$ med egenverdier henholdsvis $\hbar/2$ og $-\hbar/2$. Egenfunksjoner for banedreieimpuls og dens z-komponent betegnes med $|l, m_l\rangle$.

a) Gitt at $\vec{L}$ og $\vec{S}$ er dreieimpulsoperatorer (for uavhengige dynamiske frihetsgrader), vis at $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ er en dreieimpulsoperator, men at $\vec{J}^{(-)} = \vec{L} - \vec{S}$ ikke er det.

b) Når vi begrenser oss til p-tilstander ($l = 1$) for banedreieimpulsen, hvilke verdier kan da kvantetallet J (som tilhører partikkelens totaldreieimpuls $\vec{J}$) anta? (Utledning ikke påkrevd.)

Konstruer de ulike tilstandsfunksjonene $|J, m_J\rangle$ for totaldreieimpulsen og dens z-komponent ved hjelp av tilstandene $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ og $|l, m_l\rangle$ med $l = 1$.

Oppgave 2

Vis at følgende uttrykk for sannsynlighetstetthet ρ og sannsynlighetsstrømtetthet $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \rho &= \Psi^+\Psi \\ \vec{j} &= \Psi^+ c\vec{\alpha}\,\Psi \end{aligned}$$

oppfyller kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$$

for en fri partikkel som adlyder Dirac-likninga

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c\vec{\alpha}\,\nabla\Psi + i\beta\frac{mc^2}{\hbar}\,\Psi = 0.$$

Det forutsettes at β og α-matrisene er hermiteske (selvadjungerte).
Kan ρ anta negative verdier? (Begrunn svaret).

Oppgave 3

a) For et elektron i en eksitert atomær tilstand $|i\rangle$ (energi E_i) vil i dominerende orden, og i elektrisk-dipol-tilnærmelsen, den spontane overgangssannsynlighet pr. tidsenhet til en annen atomær tilstand $|f\rangle$ (energi E_f) være gitt som

$$w^{sp}_{i\to f} = \frac{4\alpha\omega^3_{if}}{3c^2}|\langle f|\vec{r}|i\rangle|^2,$$

der α er finstrukturkonstanten og $\hbar\omega_{if} = E_i - E_f$.

Hvilken vekselvirkning mellom strålingsfelt og ladede partikler ligger til grunn for utledningen av ovenstående overgangssannsynlighet? Hva består elektrisk-dipol-tilnærmelsen i? Hva er en forbudt overgang?

b) Et elektron (masse m) befinner seg i det éndimensjonale potensialet

$$V(q) = \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Vi nummererer energinivåene slik at nivå nr. n tilsvarer energien $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Vis at i elektrisk-dipol-approksimasjonen vil elektronet bare ha tillatte overganger fra et nivå, n, til nabonivåene $n \pm 1$.

Vis videre at for spontane overganger vil overgangssannsynlighetene pr. tidsenhet fra tilstand n til tilstand $n-1$,

$$w_n \equiv w_{n\to n-1},$$