Kvantemekanikk 2

Løsningsskisse eksamen 29.8.1997

Oppgave 1

a) For en dreieimpulsoperator $\vec{A}$ gjelder kommuteringsreglene

$$[A_x, A_y] = i\hbar\, A_z \qquad \text{(og syklisk indeksbytte).}$$

Vi har

$$[L_x \pm S_x, L_y \pm S_y] = [L_x, L_y] + [S_x, S_y] = i\hbar(L_z + S_z).$$

Altså er $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$, men $[J_x^{(-)}, J_y^{(-)}] \neq i\hbar J_z^{(-)}$. Konklusjonen er derfor at

$\vec{J}$ er dreieimpulsoperator, $\vec{J}^{(-)}$ er ikke.

b) Ved addisjon av to dreieimpulsoperatorer, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, vil generelt kvantetallene oppfylle triangelulikheten

$$|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2.$$

I dette tilfellet er J halvtallig fordi J_z er halvtallig multiplum av $\hbar$, og triangelulikheten gir at J er lik $\frac{3}{2}$ eller $\frac{1}{2}$.

Vi har $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, og $|1,-1\rangle$ som byggesteiner. Ordnet etter egenverdien av $J_z = L_z + S_z$ har vi følgende seks produkttilstander:

Produkttilstand	$J_z/\hbar$
$\vert\uparrow\rangle\vert 1,1\rangle$	$\frac{3}{2}$
$\vert\uparrow\rangle\vert 1,0\rangle$	$\frac{1}{2}$
$\vert\downarrow\rangle\vert 1,1\rangle$	$\frac{1}{2}$
$\vert\uparrow\rangle\vert 1,-1\rangle$	$-\frac{1}{2}$
$\vert\downarrow\rangle\vert 1,0\rangle$	$-\frac{1}{2}$
$\vert\downarrow\rangle\vert 1,-1\rangle$	$-\frac{3}{2}$

Vi må derfor ha

$$\begin{aligned}
|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle &= |\uparrow\rangle|1,1\rangle \\
|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= \alpha|\uparrow\rangle|1,0\rangle + \beta|\downarrow\rangle|1,1\rangle \\
|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \gamma|\uparrow\rangle|1,-1\rangle + \delta|\downarrow\rangle|1,0\rangle \\
|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle &= |\downarrow\rangle|1,-1\rangle
\end{aligned}$$

med ukjente koeffisienter α, β, γ og δ. For å bestemme disse koeffisientene anvender vi stigeoperatoren $J_- = L_- + S_-$ på tilstanden $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$:

$$J_-|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{1\cdot 2 - 1\cdot 0}|\uparrow\rangle|1,0\rangle + \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}}|\downarrow\rangle|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}|\uparrow\rangle|1,0\rangle + \hbar|\downarrow\rangle|1,1\rangle.$$

Da $J_-|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle \propto |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ er $\alpha = \sqrt{2}\,\beta$. Normeringen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ viser at vi kan ta $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ og $\beta = \sqrt{\frac{1}{3}}$:

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}|\uparrow\rangle|1,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\downarrow\rangle|1,1\rangle$$

Ved å anvende J_- på denne kan vi bestemme $|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle$. Alternativt kan vi anvende J_+ på $|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle$, med samme resultat:

$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}|\uparrow\rangle|1,-1\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\downarrow\rangle|1,0\rangle.$$

En vilkårlig fasefaktor kan multipliseres inn i disse resultatene.

Det gjenstår å bestemme koeffisientene i sammenhengene

$$\begin{aligned}|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= a|\uparrow\rangle|1,0\rangle + b|\downarrow\rangle|1,1\rangle \\ |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= c|\uparrow\rangle|1,-1\rangle + d|\downarrow\rangle|1,0\rangle\end{aligned}$$

Ortogonalitet mellom $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ og $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ gir $a\sqrt{\frac{2}{3}} + b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0$, som med normering gir $a = \sqrt{\frac{1}{3}}, b = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, på en felles fasefaktor nær. Tilsvarende gir ortogonaliteten $\langle\frac{3}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = 0$ at $c = \sqrt{\frac{1}{3}}, d = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Altså:

$$\begin{aligned}|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\uparrow\rangle|1,0\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}|\downarrow\rangle|1,1\rangle \\ |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\uparrow\rangle|1,-1\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}|\downarrow\rangle|1,0\rangle\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi trenger

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\Psi^+}{\partial t}\Psi + \Psi^+\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Innsetting fra Diraclikninga og dens adjungerte (der $(AB)^+ = B^+A^+$ benyttes),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -c\vec{\alpha}\nabla\Psi - i\beta mc^2\hbar^{-1}\Psi \\ \frac{\partial\Psi^+}{\partial t} &= -c\nabla\Psi^+\vec{\alpha} + imc^2\hbar^{-1}\Psi^+\beta,\end{aligned}$$

gir

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -c(\nabla\Psi^+)\vec{\alpha}\Psi - c\Psi^+\vec{\alpha}\nabla\Psi = -c\left((\nabla\Psi^+)\vec{\alpha}\Psi + \Psi^+\vec{\alpha}\nabla\Psi\right) = -c\nabla\left(\Psi^+\vec{\alpha}\Psi\right) = -\nabla\vec{\jmath}.$$

Altså er

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{\jmath} = 0,$$

som skulle bevises.

Da

$$\rho = \Psi^+\Psi = (\psi_1^*\psi_2^*\psi_3^*\psi_4^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} |\psi_i|^2 ,$$

er alltid $\rho \geq 0$.

Oppgave 3

a) Det dominerende vekselvirkningsledd er $H_1' = \frac{e}{m}\vec{p}\vec{A}$. Dette leddet kommer fra den kinetiske energi for en partikkel med ladning $(-e)$,

$$\frac{(\vec{p}+e\vec{A})^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + H_1' + \frac{e^2\vec{A}^2}{2m}$$

med strålingsfelt tilstede, og i Coulombjustering.

Elektrisk dipoltilnærmelsen betyr *fysisk* at atomets utstrekning er forsvinnende liten i forhold til feltets bølgelengde, og *regneteknisk* at $e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}$ erstattes med 1 i matriseelementet.

Forbudt overgang: $\langle f|\vec{p}|i\rangle = 0$, ev. $\langle f|\vec{r}|i\rangle = 0$, dvs at overgangssannsynligheten blir null i elektrisk-dipol-tilnærmelsen.

b) I elektrisk-dipol-approksimasjonen er overgangssannsynligheten proporsjonal med

$$|\langle n_f|q|n_i\rangle|^2 .$$

Ved å uttrykke koordinaten ved skapelses- og annihilasjons-operatorer,

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+),$$

ser vi at

$$|\langle n_f|q|n_i\rangle|^2 \propto \left|\langle n_f|(\sqrt{n_i}|n_i-1\rangle + \sqrt{n_i+1}|n_i+1\rangle)\right|^2 = 0$$

hvis $n_f \neq n_i \pm 1$.

Videre er $w_n \equiv w_{n\to n-1} \propto n$, så derfor er

$$\frac{w_n}{w_1} = \underline{\underline{n}}.$$

Det eksplisitte uttrykket for w_1 finner vi fra punkt a):

$$w_1 = \frac{4\alpha}{3c^2}\,\omega^3 \cdot \frac{\hbar}{2m\omega} = \underline{\underline{\frac{2\alpha}{3mc^2}\,h\omega^2}}.$$

c) Når vi kaller det midlere antall partikler i nivå nr. k ved tida t for $x_k(t)$ vil de spontane overgangene gi følgende tidsutvikling:

$$\frac{dx_2}{dt} = -w_2 \cdot x_2 \qquad (1)$$
$$\frac{dx_1}{dt} = -w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 \qquad (2)$$

Løsningen av (1), med startbetingelsen $x_2(0) = N_0$, er

$$x_2(t) = N_0 \, e^{-w_2 t}.$$

Innsetting i (2) gir

$$\frac{dx_1}{dt} + w_1 x_1 = w_2 x_2 = w_2 N_0 e^{-w_2 t}.$$

Dette kan skrives

$$e^{-w_1 t} \frac{d}{dt}\left(x_1 e^{w_1 t}\right) = w_2 N_0 e^{-w_2 t},$$

eller, ved hjelp av $w_2 = 2w_1$,

$$\frac{d}{dt}\left(x_1 e^{w_1 t}\right) = 2N_0 w_1 e^{-w_1 t}.$$

Integrasjon gir

$$x_1 e^{w_1 t} = -2N_0 e^{-w_1 t} + \text{ konstant}.$$

Da $x_1 = 0$ ved $t = 0$ får vi at konstanten er lik $2N_0$. Dvs

$$x_1 e^{w_1 t} = 2N_0 \left(1 - e^{-w_1 t}\right),$$

eller

$$x_1(t) = \underline{\underline{2N_0 \left(e^{-w_1 t} - e^{-2w_1 t}\right)}}.$$

Omskrivningen

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}N_0 - \tfrac{1}{2}N_0 \left(1 - 2e^{-w_1 t}\right)^2$$

viser at maksimalverdien er $\underline{\underline{\tfrac{1}{2}N_0}}$, som opptrer ved tidspunktet $t_0 = w_1^{-1} \ln 2$.

Oppgave 4

a) Grunnlikningene er

(1) $\quad V(\vec{r} + \epsilon_F(n(\vec{r})) = \text{ konstant}$

(2) $\quad \nabla^2 V(\vec{r}) = \dfrac{e}{\varepsilon_0}\left[-en(\vec{r}) + \text{ev. andre ladningstettheter}\right].$

Her betyr "konstant" det samme som "uavhengig av $\vec{r}$", og $\epsilon_F(n)$ er maksimalenergien i en ideell fermigass ved partikkeltetthet n.

Likning (1) sier at overalt skal det mest energirike elektron ha samme energi. Likning (2) er Poissons likning, som gir sammenhengen mellom potensial og ladningstetthet.

b) For små endringer Δn i antallstettheten er

$$\Delta\epsilon_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left[(n+\Delta n)^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right] \simeq \frac{h^2}{12m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\Delta n}{n^{\frac{1}{3}}},$$

slik at likning (1) i punkt a) blir

$$V(\vec{r}) + \Delta\epsilon_F = 0,$$

eller

$$\underline{\underline{V(r) + \frac{h^2}{12m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\Delta n}{n^{\frac{1}{3}}} = 0.}}$$

Vi har forutsatt at prøveladningen ligger i origo, og brukt sfærisk symmetri.

c) Utenfor origo er det ingen andre ladninger enn elektronene, så likning (2) i a) er for $r > 0$

$$\nabla^2 V = -\frac{e^2}{\varepsilon_0}\,\Delta n.$$

Ved innsetting av Δn fra punkt b) tar dette formen

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) V(r) = \frac{1}{R_s^2}\, V(r), \tag{3}$$

der vi har innført konstanten

$$R_s = \frac{h}{e}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{12m}}\,\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{6}}.$$

Multiplikasjon av differensiallikningen (3) med r gir

$$\frac{d^2}{dr^2}(rV) = R_s^{-2}(rV).$$

Løsningen av denne som ikke divergerer for $r \to \infty$ er

$$rV = \text{konstant } e^{-r/R_s},$$

eller

$$V(r) = \frac{\text{konst.}}{r}\, e^{-r/R_s}.$$

Tett inntil prøveladningen må et elektron føle den *uskjermede* Coulombtiltrekningen. Det bestemmer konstanten, og vi får det skjermede Coulombpotensialet

$$\underline{\underline{V(r) = -\frac{qe}{4\pi\varepsilon_0 r}\, e^{-r/R_s}.}}$$