Norges Teknisk Naturvitenskapelige Universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
J.S.Høye, tel 93654

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74326 KVANTEMEKANIKK 2

Lørdag 15.august 1998

kl.0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

a)

La egentilstandene for spinnoperatoren S_z for en spinn-$\frac{1}{2}$ partikkel være $|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$ med egenverdier henholdsvis $\hbar/2$ og $-\hbar/2$. Egenfunksjoner for banedreieimpuls og dens z-komponent betegnes med $|l, m_l\rangle$.

a) Gitt at $\vec{L}$ og $\vec{S}$ er dreieimpulsoperatorer (for uavhengige dynamiske frihetsgrader), vis at $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ er en dreieimpulsoperator, men at $\vec{J}^{(-)} = \vec{L} - \vec{S}$ ikke er det.

b) Når vi begrenser oss til p-tilstander ($l = 1$) for banedreieimpulsen, hvilke verdier kan da kvantetallet J (som tilhører partikkelens totaldreieimpuls $\vec{J}$) anta? (Utledning ikke påkrevd.)

Konstruer de ulike tilstandsfunksjonene $|J, m_J\rangle$ for totaldreieimpulsen og dens z-komponent ved hjelp av tilstandene $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ og $|l, m_l\rangle$ med $l = 1$.

Oppgitt: For dreieimpuls gjelder

$[J_x,J_y] = i\hbar J_z$; $[J_y,J_z] = i\hbar J_x$; $[J_z,J_x] = i\hbar J_y$

Stigeoperatorene $J_\pm = J_x + iJ_y$ oppfyller

$J_\pm |j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|j,m\pm1\rangle$

Oppgave 2

Vis at følgende uttrykk for sannsynlighetstetthet ρ og sannsynlighetsstrømtetthet $\vec{j}$,

$$\rho = \Psi^{+}\Psi$$
$$\vec{j} = \Psi^{+} c\vec{\alpha}\, \Psi$$

oppfyller kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$$

for en fri partikkel som adlyder Dirac-likninga

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c\vec{\alpha}\, \nabla \Psi + i\beta \frac{mc^2}{\hbar}\, \Psi = 0.$$

Det forutsettes at β og α-matrisene er hermiteske (selvadjungerte).
Kan ρ anta negative verdier? (Begrunn svaret).

Oppgave 3

a) Forklar kort hva Born–Oppenheimer metoden, f.eks. for molekylberegninger, går ut på.

b) To partikler befinner seg i potensialet

$$V = V(X,x) = \tfrac{1}{2}(AX^2 + 2BXx + Cx^2)$$

som tilsvarer to koplede harmoniske oscillatorer. Partikkelen med koordinat X er tung med masse M mens partikkelen med koordinat x er lett med masse m slik at $m << M$. Koeffisientene A, B og C er av samme størrelsesorden. Selv om dette problemet kan løses eksakt skal en her benytte Born–Oppenheimer metoden for tilnærmet løsning. Dvs. at en først betrakter den lette partikkelen for å bestemme et effektivt potensial for den tunge. Hva blir egenfrekvensen ω til den lette partikkelen, og hva blir egenfrekvensen Ω til den tunge partikkelen i denne tilnærmelsen?

Oppgitt: Potensial for enkel harmonisk oscillator $V(x) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2$.

Oppgave 4

a) Anta at Hamiltonoperatoren H_0 for et system har kjente egentilstander $|n\rangle$ med tilhørende energier E_n. Fra tiden $t=0$ perturberes systemet med et lite bidrag H' som adderes til H_0. Tilstanden $|\psi\rangle$ til systemet kan da rekkeutvikles i de uperturberte egentilstandene slik at

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle\, e^{-iE_n t/\hbar}$$

Benytt den tidsavhengige Schrödingerlikningen $H|\psi\rangle = i\hbar\, \partial|\psi\rangle/\partial t$ til å vise at tidsavhengig perturbasjonsteori til første orden for koeffisientene $c_n(t)$ gir

$$c_f(t) = c_f(0) + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fn}t'}\, M_{fn}c_n(0)$$

der

$$\omega_{fn} = (E_f - E_n)/\hbar \qquad M_{fn} = \langle f|H'|n\rangle\, .$$

b) Overgangssannsynligheten for overgang mellom to tilstander i og f er gitt ved uttrykket $(i\neq f)$

$$P_{i\to f} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, |c_f(t)|^2 = A\ \delta(\Delta E)$$

der $\Delta E = E_f - E_i$. Regn ut uttrykket for koeffisienten A i første ordens perturbasjonsteori.

Oppgitt: $\tau\left[\frac{\sin(x\tau)}{x\tau}\right]^2 \underset{\tau\to\infty}{\to} \pi\,\delta(x)\, .$