Norges Teknisk Naturvitenskapelige Universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
J.S.Høye, tel.93654

EKSAMEN I FAG 74326 KVANTEMEKANIKK 2
Lørdag 28.november 1998
KL. 0900 – 1400

Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

a) I Thomas–Fermi approksimasjonen beskrives et mangeelektronsystem ved grunnlikningene

$$V(\mathbf{r}) + \epsilon_F = \xi$$
$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \frac{e}{\epsilon_0}\rho\,.$$

Gjør kort rede for likningene og størrelsene som inngår.

b) En homogen elektrongass med konstant antallstetthet n befinner seg i en jevnt ladet positiv bakgrunn slik at totalsystemet er nøytralt. (Gassen er i grunntilstanden ved temperaturen $T = 0$.) Denne tilstanden forstyrres ved en liten endring i den positive bakgrunnen. Endringen blir laget periodisk i x–retningen slik at den genererer et periodisk potensial gitt ved

$$V_a(\mathbf{r}) = \gamma \sin kx\,.$$

Dette ytre potensialet $V_a(\mathbf{r})$, vil endre tettheten av elektronene som igjen påvirker det resulterende effektive potensialet (den positive bakgrunnen holdes nå fast). For en liten forstyrrelse γ er sammenhengen mellom det effektive potensialet $V = V(\mathbf{r})$ og endringen i antallstettheten Δn gitt ved $\Delta n = -aV$
Bestem koeffisienten a.

c) Det resulterende effektive potensialet er gitt ved $V = V(\mathbf{r}) = b\gamma \sin kx$. Vis dette og bestem koeffisienten b.

Oppgitt: $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$.

Oppgave 2

a) En Dirac–partikkel har spinn beskrevet ved spinnoperatoren **S** som kan uttrykkes som

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{4i}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha})$$

der matrisene α_j oppfyller relasjonene

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} .$$

Bestem (skriv ned) først komponentene S_x, S_y og S_z til **S**, og beregn så kommutatoren $[S_y, S_z]$ og kvadratet av x–komponenten S_x^2 .

b) Beregn kommutatoren $[H,\mathbf{S}]$ der H er Hamiltonoperatoren

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta mc^2$$

for en fri Dirac–partikkel.

Vis at operatoren $\mathbf{Sp}$ kommuterer med den gitte Hamiltonoperatoren.

Oppgitt:

$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} = \epsilon_{ijk}\, \alpha_i\alpha_j \cdot \mathbf{e}_k$

$\beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0$.

Oppgave 3

a) I ikke–relativistisk strålingsteori forårsakes overganger mellom tilstander i atomære system ved ledd i Hamiltonoperatoren som inneholder vekselvirkning mellom ladete partikler og strålingsfelt. Det dominerende leddet i første ordens tidsavhengig perturbasjonsteori er

$$H_1' = \frac{e}{m}\mathbf{A}\mathbf{p}$$

der operatoren for det elektromagnetiske feltet er gitt ved

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} C_k (a_{\mathbf{k}\lambda}\, e^{i\mathbf{kr}} + a^+_{\mathbf{k}\lambda}\, e^{-i\mathbf{kr}})\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$$

Her er C_k er en konstant, $e_{k\lambda}$ er enhetsvektor, mens $a^{+}_{k\lambda}$ og $a_{k\lambda}$ er kreasjons– og annihilasjonsoperatorer.

I første ordens tidsavhengig perturbasjonsteori skal matriseelementet

$$M_{fi} = \langle f | H'_1 | i \rangle$$

beregnes. Når en betrakter utsending av et foton med bølgetallsvektor $\mathbf{k}$ og polarisering angitt ved λ blir resultatet av formen

$$M_{fi} = B\, \mathbf{M}\, \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad \text{med} \quad \mathbf{M} = \langle \psi_f | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{p} | \psi_i \rangle$$

der ψ_f og ψ_i er de atomære bølgefunksjoner. Hva blir koeffisienten B, og hva er B når en kun betrakter spontane overganger?

Hva er elektrisk–dipol–tilnærmelsen?

b) Overgangssannsynligheten pr. tidsenhet mellom 2 tilstander er gitt ved

$$P_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \; \delta(\Delta E) \qquad (\Delta E = E_i - E_f - \hbar\omega_k)\,.$$

For å finne total overgangssannsynlighet pr. tidsenhet $\omega_{i\to f}$ fra atomær tilstand i til f må en integrere over alle muligheter for fotoner. En finner da et uttrykk av formen

$$\omega_{i\to f} = \sum_{\lambda} D \int |M_{fi}|^2 \, d\Omega \qquad (d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi)$$

der integralet går over retningene til fotonet. Bestem koeffisienten D når tettheten av tilstander i $\mathbf{k}$–rommet for hver polarisasjonsretning er $V/(2\pi)^3$. (Volumet V er hjelpestørrelse for å telle tilstander og vil kansellere mot tilsvarende faktor i størrelsen C_k foran.)

Oppgitt: $\delta(ax) = \frac{1}{a}\,\delta(x)$.

$a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

Oppgave 4

a) Forklar kort hva Born–Oppenheimer metoden, f.eks. for molekylberegninger, går ut på.

b) To partikler befinner seg i potensialet

$$V = V(X,x) = \tfrac{1}{2}(AX^2 + 2BXx + Cx^2)$$

som tilsvarer to koplede harmoniske oscillatorer. Partikkelen med koordinat X er tung med masse M mens partikkelen med koordinat x er lett med masse m slik at $m << M$. Koeffisientene A, B og C er av samme størrelsesorden. Selv om dette problemet kan løses eksakt skal en her benytte Born–Oppenheimer metoden for tilnærmet løsning. Dvs. at en først betrakter den lette partikkelen for å bestemme et effektivt potensial for den tunge. Hva blir egenfrekvensen ω til den lette partikkelen, og hva blir egenfrekvensen Ω til den tunge partikkelen i denne tilnærmelsen?

Oppgitt: Potensial for enkel harmonisk oscillator $V(x) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$.