Institutt for fysikk, NTNU
Faglig kontakt under eksamen:
Professor P. C. Hemmer
Tlf. 93648

Kontinuasjonseksamen i fag 74326 Kvantemekanikk 2

Fredag 27. august 1999
Kl. 09.00 - 14.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

Ved kvantisering av det elektromagnetiske feltet er operatoren for elektriske feltet av formen

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}_\lambda} \mathcal{E}_{\mathbf{k}_\lambda}$$

med

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\lambda} = i\, C_k \left[a_{\mathbf{k}_\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - a^+_{\mathbf{k}_\lambda} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right] \hat{e}_{\mathbf{k}_\lambda}$$

mens operatoren for det magnetiske feltet er

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}_\lambda} \left(\hat{k} \times \mathcal{E}_{\mathbf{k}_\lambda} \right).$$

Her er $a_{\mathbf{k}_\lambda}$ og $a^+_{\mathbf{k}_\lambda}$ annihilasjons- og kreasjonsoperator mens $\hat{e}_{\mathbf{k}_\lambda}$ og $\hat{k}$ $(= \mathbf{k}/k)$ er enhetsvektorer. Hamiltonoperatoren for feltet i et volum V er $(c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1)$

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) d\mathbf{r}$$

Koeffisientene C_k ovenfor er slik at utregnet blir Hamiltonoperatoren

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_\lambda} \hbar \omega_k \left(a_{\mathbf{k}_\lambda} a^+_{\mathbf{k}_\lambda} + a^+_{\mathbf{k}_\lambda} a_{\mathbf{k}_\lambda} \right)$$

Vis dette og fastlegg med det koeffisientene C_k.

Oppgitt: $[a, a^+] = 1$

Oppgave 2.

a) Ved fotoelektrisk effekt faller elektromagnetisk stråling inn mot et atom og slår ut et elektron fra en bunden tilstand til en tilstand i det kontinuerlige spektrum. For å beregne spredningstverrsnittet for denne prosessen kan en benytte halvklassisk strålingsteori sammen med Fermis gylne regel

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|V_{\mp}|i\rangle|^2 \, \rho(E_i \pm \hbar\omega)$$

Elektromagnetisk stråling med vinkelfrekvens ω faller inn mot et atom, og det antas at elektronet som blir slått ut, har stor men ikke-relativistisk energi slik at $E_i \ll \hbar\omega \ll mc^2$ der m er elektronmassen og ω er vinkelfrekvensen til strålingen (c er lyshastigheten). Hva blir i denne tilnærmelsen energien E og størrelsen på impulsen $p = \mathrm{p}$ til elektronet etter at det er blitt slått ut?

Det utgående elektronet har en tetthet av tilstander (antall tilstander pr. energienhet) som kan skrives som

$$\rho = K\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}d\Omega$$

der V er hjelpevolum for å telle tilstander mens $d\Omega$ er romvinkelelement for retningene til bevegelsen av utgående partikkel. Bestem koeffisienten K når tettheten av tilstander i p-rommet er $V/(2\pi\hbar)^3$.

b) Vekselvirkningen mellom elektronet og det elektromagnetiske feltet er her gitt ved

$$H_1 = \frac{e}{m}\mathbf{A}\mathbf{p}$$

der

$$\mathbf{A} = A_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}\hat{e}_{\mathbf{k}} + \text{kompl.konj.}$$

($\hat{e}_{\mathbf{k}}$ er enhetsvektor.) Hva er uttrykket for impulsoperatoren p?

La $\psi_i(\vec{r})$ være den normerte bølgefunksjonen til elektronet før mens $\psi_f(\vec{r})$ er den normerte bølgefunksjonen etter at elektronet er slått løs. Hva er uttrykket for $\psi_f(\vec{r})$ (dvs. fri partikkel i volum V)?

Sett opp uttrykket for matriseelementet

$$M = \langle f|V_{\mp}|i\rangle$$

i den gylne regel angitt ovenfor for denne fotoelektriske prosessen.

c) Intensiteten (energi pr. flate- og tidsenhet) til innfallende stråling er $I = 2\varepsilon_0\omega^2 c|A_0^2|$. ($\varepsilon_0$ er permittiviteten til vakuum). Hva blir spredningstverrsnittet $d\sigma/d\Omega$ for denne prosessen når

$$d\sigma = w_{i\to f}/J$$

der J er antall fotoner inn pr. flate- og tidsenhet? (For å forenkle kan en her benytte ρ og M uten å sette inn uttrykkene funnet ovenfor for disse størrelsene.)

Oppgave 3

a) I ikke–relativistisk strålingsteori forårsakes overganger mellom tilstander i atomære systemer ved ledd i Hamiltonoperatoren som inneholder vekselvirkning mellom ladete partikler og strålingsfeltet. Hvilke typer vekselvirkningsledd kan forekomme når også elektronets magnetiske moment $\vec{\mu}$ inkluderes? Hvilket ledd bidrar i første ordens tidsavhengig perturbasjonsteori?

b) Den spontane overgangssannsynligheten pr. tidsenhet for overgang mellom elektrontilstandene $|i>$ og $|f>$ i et atom eller molekyl slik at et foton med polarisering $e_{k\lambda}$ sendes ut i romvinkelen $d\Omega$, er gitt ved

$$d\Gamma_{i\to f} = \frac{\alpha\omega_{if}^3}{2\pi c^2}\,|e_{k\lambda}<f|r|i>|^2\,d\Omega$$

når elektrisk–dipol–tilnærmelsen gjøres. (Her er $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ finstrukturkonstanten.)
Den spontane overgangssannsynlighet pr. tidsenhet når alle fotonets tilstander (dvs. retning og polarisering) inkluderes blir et uttrykk

$$\omega_{i\to f} = a\omega_{if}^3|<f|\vec{r}|i>|^2$$

Bestem koeffisienten a.

c) Et elektron med masse m beveger seg som en fri partikkel i området begrenset til $0<z<L$ langs z–aksen. Egentilstandene er da gitt ved

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(kz)$$

med egenverdier $E_n = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ der $k = \frac{\pi}{L}n$ med $n = 1,2,3,\cdots$. Mellom 2 tilstander med henholdsvis $n=n_i$ og $n=n_j$ i dette systemet vil det være spontane overganger som angitt under punkt b. Hva er ω_{if} for dette tilfellet?
Beregn overgangssannsynligheten $\omega_{i\to f}$ mellom de 2 tilstandene.

Oppgitt: $\cos(u+v)-\cos(u-v) = -2\sin(u)\sin(v)$.

Oppgave 4

a) En Dirac–partikkel har spinn beskrevet ved spinnoperatoren $\mathbf{S}$ som kan uttrykkes som

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{4i}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha})$$

der matrisene α_j oppfyller relasjonene

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\,.$$

Bestem (skriv ned) først komponentene S_x, S_y og S_z til $\mathbf{S}$, og beregn så kommutatoren $[S_y, S_z]$ og kvadratet av x–komponenten S_x^2 .

b) Beregn kommutatoren $[H,\mathbf{S}]$ der H er Hamiltonoperatoren

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta mc^2$$

for en fri Dirac–partikkel.

Vis at operatoren $\mathbf{S}\mathbf{p}$ kommuterer med den gitte Hamiltonoperatoren.

Oppgitt:

$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} = \epsilon_{ijk}\, \alpha_i\alpha_j \cdot \mathbf{e}_k$

$\beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0\,.$