Forslag til løsning.

Oppgave 1

a/. Ved innsetting og utregning finner en først

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\lambda}\sum_{\vec{k}'\lambda'}\int_V \varepsilon_0(-C_k C_{k'})\left(a_{\vec{k}\lambda}e^{i\vec{k}\vec{r}} - a^+_{\vec{k}\lambda}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

$$\times\left(a_{\vec{k}'\lambda'}e^{i\vec{k}'\vec{r}} - a^+_{\vec{k}'\lambda'}e^{-i\vec{k}'\vec{r}}\right)\left(\hat{e}_{\vec{k}\lambda}\hat{e}_{\vec{k}'\lambda'} + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c^2}(\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k}\lambda})(\hat{k}'\times\hat{e}_{\vec{k}'\lambda'})\right)d\vec{r}$$

En får nå integraler av typen

$$\frac{1}{V}\int e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{r}}\,d\vec{r} = \begin{cases}1 & \text{når } \vec{k}_1=\vec{k}_2\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

Vi får bare bidrag når

$\vec{k}' = -\vec{k}$ dvs. $\hat{k}' = -\hat{k}$

eller når $\vec{k}' = \vec{k}$

Siden $\hat{k}\perp\hat{e}_{\vec{k}\lambda}$ (transversale bølger) vil $|\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k}\lambda}| = 1$.

Nå kan en velge $\hat{e}_{\vec{k}\lambda} = \hat{e}_{-\vec{k}\lambda}$, og videre med $\hat{e}_{\vec{k}'\lambda'}\hat{e}_{\vec{k}\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'}$, $\vec{k}' = \pm\vec{k}$ og $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ finner en så

$$\hat{e}_{\vec{k}\lambda}\hat{e}_{\vec{k}'\lambda'} + (\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k}\lambda})(\hat{k}'\times\hat{e}_{\vec{k}'\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}(1+\hat{k}\hat{k}') = \begin{cases}2\delta_{\lambda\lambda'}, & \vec{k}'=\vec{k}\\ 0, & \vec{k}'=-\vec{k}\end{cases}$$

Nå gjelder $\vec{k}' = -\vec{k}$ for $a_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}'\lambda'}$ og $a^+_{\vec{k}\lambda}a^+_{\vec{k}'\lambda'}$ leddene slik at disse forsvinner. Kryssleddene blir da igjen og en finner $(\vec{k}'=\vec{k})$ $\left(\sum_{\lambda'}\delta_{\lambda\lambda'}=1\right)$

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0\sum_{\vec{k}\lambda}C_k C_k\left(a_{\vec{k}\lambda}a^+_{\vec{k}\lambda} + a^+_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}\lambda}\right)\cdot V\cdot 2$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon_0 V\sum_{\vec{k}\lambda}C_k^2\left(a_{\vec{k}\lambda}a^+_{\vec{k}\lambda} + a^+_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}\lambda}\right)}}$$

Sammenliknet med oppgitt svar, finner en

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_k = \varepsilon_0 V C_k^2$$

$$\underline{\underline{C_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}}}$$

Oppgave 2

a) Det utgående elektronet har energien

$$E = E_f = E_i + \hbar\omega \approx \underline{\hbar\omega}$$

En har relasjonen $E = p^2/2m$ slik at impulsen blir $p = \sqrt{2mE} = \underline{\underline{\sqrt{2m\hbar\omega}}}$

For tettheten av tilstander har en

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\vec{p} = \rho\, dE = K \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\, d\Omega\, dE$$

slik at $d\vec{p} = K\, d\Omega\, dE$.

Med kulekoordinater finner en så

$$d\vec{p} = d\Omega\, p^2 dp = K\, d\Omega\, dE$$

Differensiering gir så $dE = d(p^2/2m) = \frac{p}{m} dp$

slik at en finner

$$p^2 dp = K \frac{p}{m} dp$$

$$K = \underline{pm} \quad (= \underline{\underline{\sqrt{2mE}\, m}})$$

b) Impulsoperatoren er

$$\vec{p} = \underline{\frac{\hbar}{i}\nabla}$$

Normert bølgefunksjon for fri partikkel i volum V er gitt ved

$$\underline{\underline{\psi_f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}}}$$

Matriseelementet for denne prosessen blir

$$M = \langle f | V_- | i \rangle = \int \psi_f^*(\vec{r}) \frac{e}{m} e^{i\vec{k}\vec{r}} A_0 (\hat{e}_{\vec{k}}\vec{p}) \psi_i(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e}{m} A_0 \frac{\hbar}{i} \hat{e}_k \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} \nabla \psi_i(\vec{r})\, d\vec{r}}}$$

der $\vec{q} = \underline{\vec{p}/\hbar - \vec{k}}$

Her er det brukt at $H_1 = V_+ e^{i\omega t} + V_- e^{-i\omega t}$

slik at $V_1 = \frac{e}{m} A_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} (\hat{e}_{\vec{k}}\vec{p})$

c) Fotonintensiteten blir

$$J = \frac{I}{\hbar\omega} = \frac{2\varepsilon_0 \omega^2 c |A_0^2|}{\hbar\omega} = \frac{2\varepsilon_0 \omega c |A_0^2|}{\hbar}$$

Spredningstverrsnittet blir følgelig

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{w_{i\to f}/d\Omega}{J} = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega c |A_0^2|} \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \rho$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{\varepsilon_0 \omega c |A_0^2|} |M|^2 \rho}}$$

Oppgave 3.

a) Hamiltonoperatoren for elektron i strålingsfelt er

$$H = \frac{1}{2m}(\vec p + e\vec A)^2 - \vec\mu\vec B = \frac{1}{2m}p^2 + H_1' + H_2' + H_3'$$

der

$$H_1' = \frac{e}{m}\vec A\vec p, \quad H_2' = \frac{e^2}{2m}A^2, \quad H_3' = -\vec\mu\vec B$$

der $\vec B = \nabla\times\vec A$. [$\vec p\vec A = \vec A\vec p$ p.g.a. Coulomb-betingelsen $\nabla\vec A = 0$. Det siste leddet skyldes vekselvirkning med elektronets magnetiske moment $\vec\mu$.]

Leddet som bidrar i første ordens perturbasjonsteori er $\underline{H_1' = \frac{e}{m}\vec A\vec p}$.

b) For å bestemme $w_{i\to f}$ må en integrere over alle vinkler og summere over de 2 polarisasjonsretningene. Med $\vec M = \langle f|\vec r|i\rangle$ vil det være en vinkel θ_λ mellom $\hat e_{k\lambda}$ og $\vec M$ ($\lambda = 1,2$) slik at

$$\hat e_{k\lambda}\vec M = M\cos\theta_\lambda$$

Integrert over kuleflaten har en da

$$I_\lambda = \int|\hat e_{k\lambda}\vec M|^2 d\Omega = M^2\int_0^\pi \cos^2\theta_\lambda \sin\theta_\lambda\, d\theta_\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi_\lambda$$

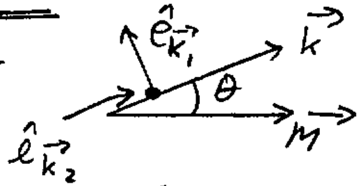
$$= M^2\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta_\lambda\right)\Big|_0^\pi = \frac{4\pi}{3}M^2$$

Følgelig har en:

$$w_{i\to f} = \frac{\alpha\,\omega_{if}^3}{2\pi c^2}\sum_{\lambda=1,2} I_\lambda = \underline{\underline{\frac{4\alpha}{3c^2}\,\omega_{if}\,M^2}}$$

Dvs. $\quad a = \underline{\underline{\frac{4\alpha}{3c^2}}}$

[Alternativ utregning:



der $\hat e_{k_1}\vec M = -M\sin\theta$ og $\hat e_{\vec k_2}\vec M = 0$.

$$\sum_{\lambda=1,2} I_\lambda = I_1 = M^2\int\sin^2\theta\, d\Omega = M^2\int(1-\cos^2\theta)\,d\Omega = \frac{8\pi}{3}M^2.$$]

c) ω_{if} er bestemt av de 2 aktuelle energinivåene

Dvs. $\hbar\omega_{if} = E_i - E_f$

$$\omega_{if} = \underline{\underline{\frac{1}{\hbar}(E_i - E_f)}} \quad \left[= \frac{\pi^2\hbar}{2mL^2}(n_i^2 - n_f^2)\right]$$

For matriseelementet har en så

$$\langle f|z|i\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_f z)\, z\sin(k_i z)\,dz =$$

$$-\frac{1}{L}\int_0^L z\left[\cos(k_f+k_i)z - \cos(k_f-k_i)z\right]dz \underset{\text{delv.int.}}{=}$$

$$-\frac{1}{L}\Big|_0^L z\left(\frac{\sin(k_f+k_i)z}{k_f+k_i} - \frac{\sin(k_f-k_i)z}{k_f-k_i}\right) + \frac{1}{L}\int_0^L\left[\frac{\sin(k_f+k_i)z}{k_f+k_i} - \frac{\sin(k_f-k_i)z}{k_f-k_i}\right]dz = 0 - \frac{1}{L}\Big|_0^L\left(\frac{\cos(k_f+k_i)z}{(k_f+k_i)^2} - \frac{\cos(k_f-k_i)z}{(k_f-k_i)^2}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{L}\left[\frac{1-(-1)^{n_+}}{(k_f+k_i)^2} - \frac{1-(-1)^{n_-}}{(k_f-k_i)^2}\right]} = \begin{cases} \underline{\underline{\frac{2L}{\pi^2}\left[\frac{1}{(n_f+n_i)^2} - \frac{1}{(n_f-n_i)^2}\right]}} \\ \underline{\underline{0}}, & n_\pm = n_f \pm n_i \text{ er partall} \end{cases}$$

Øverste svar gjelder når $n_\pm = n_f - n_i$ er oddetall. Innsatt gir dette $w_{i\to f} = a\,\omega_{if}^3|\langle f|z|i\rangle|^2$

Oppgave 4.

a) x-komponenten blir

$$S_x = \frac{\hbar}{4i}\left(\varepsilon_{231}\alpha_2\alpha_3 + \varepsilon_{321}\alpha_3\alpha_2\right) = \frac{\hbar}{4i}\left(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_2\right)$$

$$= \frac{\hbar}{4i}\left(\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_2\alpha_3 - 2\delta_{23})\right) = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2i}\alpha_2\alpha_3}}$$

når relasjonene for α_i $(i=1,2,3)$ benyttes. Tilsvarende finner en ved sykliske ombytte av x, y og z.

$$\underline{\underline{S_y = \frac{\hbar}{2i}\alpha_3\alpha_1}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{S_z = \frac{\hbar}{2i}\alpha_1\alpha_2}}$$

Ved videre å benytte relasjonene for α_i finner en

$$[S_y, S_z] = S_y S_z - S_z S_y = \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^2\left[\alpha_3\alpha_1\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}\left(\alpha_3\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3\right) = \underline{\frac{\hbar^2}{2}\alpha_2\alpha_3} = i\hbar\frac{\hbar}{2i}\alpha_2\alpha_3 = \underline{\underline{i\hbar S_x}}$$

$$S_x^2 = \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^2\left(\alpha_2\alpha_3\alpha_2\alpha_3\right) = -\frac{\hbar^2}{4}\alpha_2\left(-\alpha_2\alpha_3\right)\alpha_3 = \underline{\underline{\frac{\hbar^2}{4}}}$$

b) En har at $[\beta mc^2, \vec{S}] = 0$ da β kommuterer med 2 faktorer α_i, dvs $\beta\alpha_i\alpha_j = -\alpha_i\beta\alpha_j = (-\alpha_i)(-\alpha_j\beta) = \alpha_i\alpha_j\beta$. En finner så

$$[H, \vec{S}] = \frac{\hbar c}{4i}[\vec{\alpha}\vec{p}, \vec{S}] = \frac{\hbar c}{4i}\left[\alpha_n p_n \varepsilon_{jlk}\alpha_j\alpha_l\hat{e}_k - \varepsilon_{jlk}\alpha_j\alpha_l\hat{e}_k\alpha_n p_n\right] = \underline{\frac{\hbar c}{4i}p_n\hat{e}_k\varepsilon_{jlk}\left[\alpha_n\alpha_j\alpha_l - \alpha_j\alpha_l\alpha_n\right]}$$

Ombytte av α-matrisene gir videre

$$\alpha_n\alpha_j\alpha_l = (2\delta_{nj} - \alpha_j\alpha_n)\alpha_l = 2\delta_{nj}\alpha_l - \alpha_j(2\delta_{nl} - \alpha_l\alpha_n)$$

$$= 2\delta_{nj}\alpha_l - 2\delta_{nl}\alpha_j + \alpha_j\alpha_l\alpha_n$$

Innsatt finner en dermed

$$[H, \vec{S}] = \frac{\hbar c}{4i}p_n\hat{e}_k\varepsilon_{jlk}\,2\left[\delta_{nj}\alpha_l - \delta_{nl}\alpha_j\right]$$

$$= \frac{\hbar c}{2i}p_n\hat{e}_k\left[\varepsilon_{nlk}\alpha_l - \varepsilon_{jnk}\alpha_j\right] =$$

$$\frac{\hbar c}{2i}\left[\vec{p}\times\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\times\vec{p}\right] = \underline{\underline{i\hbar c(\vec{\alpha}\times\vec{p})}}$$

I og med at $\vec{p}\left(=\frac{\hbar}{i}\nabla\right)$ kommuterer med både H og $\vec{S}$ finner en enkelt fra ovenstående at $\vec{S}\vec{p}$ kommuterer med H idet

$$[H, \vec{S}\vec{p}] = [H, \vec{S}]\vec{p} = i\hbar c(\vec{\alpha}\times\vec{p})\vec{p} = \underline{\underline{0}}$$

$$\left(= i\hbar c\,\varepsilon_{jlk}\alpha_j p_l p_k\right)$$