NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 9 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Mandag 2. juni 1997
Tid: 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken.*

Dette eksamens-settet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$
2. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$
3. $e^-e^- \to \mu^-\mu^-$
4. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$
5. $e^+\mu^- \to \gamma\gamma$
6. $\mu^+\mu^- \to \gamma\gamma$
7. $\gamma \to e^+e^-$
8. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

b) Se nå litt nærmere på prosessen $e^+e^- \to e^+e^-$:

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden.
3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet for denne prosessen må man blant annet utføre følgende spor over γ-matriser:
$$X_{ab} = \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \left(\not{p}_1 + m_e\right) \gamma^\nu \left(\not{p}_2 - m_e\right) \gamma_\mu \left(\not{p}_2' - m_e\right) \gamma_\nu \left(\not{p}_1' + m_e\right)\right]. \qquad (1)$$
Beregn dette sporet for grensetilfellet $m_e = 0$.
4. Forklar hvordan dette sporet framkommer, og hvilke tilsvarende sporuttrykk man får å beregne. Du trenger ikke å utføre disse beregningene.

Oppgave 2:
Vi tenker oss et eksperiment som kan måle elektriske felter. Et slikt eksperiment vil nødvendigvis måtte ha endelig romlig oppløsning og endelig reponstid. Vi antar derfor at den størrelsen vi er i stand til å måle er det midlede feltet

$$\vec{\mathcal{E}} = \int d\vec{x}\, dt\, \vec{E}(\vec{x},t)\, \frac{1}{4\pi^2 a^3\, \tau}\, \mathrm{e}^{-\vec{x}^2/2a^2}\, \mathrm{e}^{-t^2/2\tau^2}, \tag{2}$$

der kvantefeltet $\vec{E}(\vec{x},t)$ har Fourier utviklingen

$$\vec{E}(\vec{x},t) = i \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{|\vec{k}|}{2}} \left[a_r(\vec{k})\, \vec{e}_r(\vec{k})\, \mathrm{e}^{-ikx} - a_r(\vec{k})^\dagger\, \vec{e}_r(\vec{k})^*\, \mathrm{e}^{ikx} \right], \tag{3}$$

med $kx = |\vec{k}|t - \vec{k}\cdot\vec{x}$.

a) Del opp $\vec{\mathcal{E}}$ i en positiv frekvens del (dvs., annhilasjonsdel) og en negativ frekvens del (dvs., kreasjonsdel),

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^{(+)} + \vec{\mathcal{E}}^{(-)},$$

og beregn kommutatoren mellom $\vec{\mathcal{E}}^{(+)}$ og $\vec{\mathcal{E}}^{(-)}$:

$$C^{ij} \equiv \left[\mathcal{E}^{\,i\,(+)}\, ,\, \mathcal{E}^{\,j\,(-)} \right]. \tag{4}$$

Oppgitt:

$$\int d\vec{x}\, dt\, \mathrm{e}^{\pm ikx}\, \mathrm{e}^{-\vec{x}^2/2a^2}\, \mathrm{e}^{-t^2/\tau^2} = 4\pi^2\, a^3\, \tau\, \mathrm{e}^{-(a^2+\tau^2)\vec{k}^2/2}$$

$$\int d\vec{k}\, |\vec{k}|\, \mathrm{e}^{-b\vec{k}^2} = 2\pi/b^2$$

b) Beregn vakuum forventningsverdien

$$D^{ij} = \langle 0|\, \mathcal{E}^i\, \mathcal{E}^j\, |0\rangle. \tag{5}$$

Tips: Det kan være nyttig å benytte kommutatoren fra forrige punkt.

c) Beregn vakuum forventningsverdien

$$D^{ijk\ell} = \langle 0|\, \mathcal{E}^i\, \mathcal{E}^j\, \mathcal{E}^k\, \mathcal{E}^\ell\, |0\rangle. \tag{6}$$

Oppgave 3:
I kvante-elektrodynamikken oppfører vakuum seg som et ulinært medium. I denne oppgaven skal du studere hvordan dette (i prinsipp) vil påvirke hvordan lys (dvs. fotoner) forplanter seg i et sterkt ytre magnetfelt $\vec{B}_0$, f.eks. nær overflaten til en nøytronstjerne. Til laveste ikke-trivielle orden er dette beskrevet av (Euler-Heisenberg) Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}^2 - \left(\vec{B}_0 + \vec{B}\right)^2 \right] + \frac{2\alpha^2}{45\, m_e^4} \left\{ \left[\vec{E}^2 - \left(\vec{B}_0 + \vec{B}\right)^2 \right]^2 + 7\left[\vec{E}\cdot\left(\vec{B}_0 + \vec{B}\right) \right]^2 \right\}. \tag{7}$$

Her er $\alpha = e^2/4\pi$ finstrukturkonstanten, og m_e elektronets masse. Alle uttrykk er i såkalte naturlige enheter.

a) 4-de ordens leddene over skyldes en form for vakuumpolarisasjon som kan beskrives ved Feynman diagrammmer. Hvilke Feynman diagrammer tror du beskriver denne effekten?

b) Forklar uten regning hvorfor disse Feynmandiagrammene predikterer en effekt som er proporsjonal med α^2 og m_e^{-4}.

Tips: Bruk dimensjonsanalyse til å bestemme riktig potens av m_e.

c) Velg koordinatsystem slik at $\vec{B}_0$ peker langs z-aksen, $\vec{B}_0 = B_0\,\hat{e}_z$, og skriv ut Lagrangetettheten opp til kvadratisk orden i feltene $\vec{E} = \vec{E}_\perp + E_z\,\hat{e}_z$ og $\vec{B} = \vec{B}_\perp + B_z\,\hat{e}_z$, der $\vec{E}_\perp$ og $\vec{B}_\perp$ er notasjon for vektorer som ligger i xy-planet.

d) Forklar hvorfor Lagrangetettheten fra forrige punkt er ekvivalent, når det gjelder å beskrive dynamikken til systemet, med en tetthet av formen

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(1 + k_1\,\epsilon)\,\vec{E}_\perp^2 + \frac{1}{2}(1 + k_2\,\epsilon)\,\vec{E}_z^2 - \frac{1}{2}(1 + k_3\,\epsilon)\,\vec{B}_\perp^2 - \frac{1}{2}(1 + k_4\,\epsilon)\,\vec{B}_z^2, \tag{8}$$

der $\epsilon = 4\alpha^2 B_0^2/(45 m_e^4)$. Gi de numeriske koeffisientene $k_1, \ldots, k_4$.

e) Bruk nå Lagrangetettheten fra forrige punkt til å bestemme forplantningshastigheten til lyset i forskjellige retninger og med forskjellig polarisering (dvs. retning av $\vec{E}$-feltet):

1. Forplantning langs z-aksen, med polarisering langs x-aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_1(z,t)\,\hat{e}_x$.
2. Forplantning langs z-aksen, med polarisering langs y-aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_2(z,t)\,\hat{e}_y$.
3. Forplantning langs x-aksen, med polarisering langs z-aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_3(x,t)\,\hat{e}_z$.
4. Forplantning langs x-aksen, med polarisering langs y-aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_4(x,t)\,\hat{e}_y$.

Bestem i alle tilfellene hvilken bølgeligning et felt av den oppgitte formen tilfredsstiller, og den tilhørende dispersjonsrelasjonen.

f) Koeffisienten

$$\epsilon = \frac{4\alpha^2\,B_0^2}{45\,m_e^4} \tag{9}$$

er dimensjonsløs. Bestem den numeriske verdien av denne når $B_0 = 10^8$ T.

Oppgitt: I SI-enheter har vi

$m_e = 9.109\,389\,7(54)\,10^{-31}$ kg,
$\alpha = 1/137.035\,989\,5(61)$,
$\hbar = 1.054\,572\,66(63)\,10^{-34}$ J s,
$c = 299\,792\,458$ m s^{-1},
$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}$ F m^{-1},
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2}.

Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude T_{fi} og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-\sum_i p_i')\,\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i'}{(2\pi)^3\,2E_i'} \tag{10}$$

2 Noen Feynmanregler for $-iT_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\longrightarrow\ p, s$	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s\ \longrightarrow$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\longleftarrow\ p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s\ \longleftarrow$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\sim\sim\ k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r\ \sim\sim$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\cdots\cdots\ k$	1	Uladet spinn–0	$k\ \cdots\cdots$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\overset{p}{\longrightarrow}$	$\dfrac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	μ	$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\overset{k}{\mu}\sim\sim\overset{}{\nu}$	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	$\cdots\overset{k}{\cdots}$	$\dfrac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

i) Dirac partikler:

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m \tag{11}$$

ii) Dirac antipartikler:

$$\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{12}$$

iii) Fotoner:

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{13}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \tag{16}$$
$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \tag{17}$$
$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \tag{18}$$
$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \tag{19}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{20}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{21}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \tag{22}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{23}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{24}$$