NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 9 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Lørdag 29. august 1998
Tid: 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken.*

Dette eksamens-settet er på 2 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^-$
2. $e^+ \mu^- \to e^- \mu^+$
3. $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^- \gamma$
4. $e^+ \mu^- \to \gamma \gamma$
5. $e^+ e^- \to e^+ e^-$
6. $\mu^- \to e^- \gamma$
7. $\gamma \to \mu^+ \mu^-$
8. $\gamma \gamma \to \mu^+ \mu^-$
9. $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
10. $\mu^- \to e^+ e^- \mu^-$

b) Se nå i litt mer detalj på myon-antimyon produksjon fra annihilasjon av fotoner: $\gamma\gamma \to \mu^+\mu^-$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$. Anta at de innkommende fotonene har kvantetall k_i, r_i, $i = 1, 2$, og det utgående myonet (anti-myonet) har kvantetall p_1, s_1 (p_2, s_2). Alle uttrykk for henholdsvis firerimpuls og spinn. Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = k_1 - p_2$.

3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet trenger vi blant annet det midlede amplitudekvadratet
$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, r_f\}} \mathcal{M}_{fi}\, \mathcal{M}^*_{fi}. \tag{1}$$
der summen går over alle spinntilstandene til de innkommende og utgående partiklene. Uttrykket over kan omskrives til en sum over spor av γ-matriser. Vis at ett av leddene i denne summen kan skrives på formen
$$\frac{2^{-r}\, e^s}{(q^2 - m^2)^2} \operatorname{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m)\, \gamma^\mu\, (\not{q} + m)\, \gamma^\nu\, (\not{p}_2 - m)\, \gamma_\nu\, (\not{q} + m)\, \gamma_\mu \right\}, \tag{2}$$
der m er myonets masse, og r og s er heltall.
4. Beregn sporet over, uttrykt ved skalarprodukt mellom de involverte firer-impulsene.
5. Finn den minste verdien som invarianten s kan ha for at denne prosessen skal være mulig.
6. Bestem resten av leddene som i tillegg til bidraget (2) utgjør $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal du se litt på en Dirac-partikkel som beveger seg gjennom en tynn elektrostatisk barriere av bredde ℓ. Vi beskriver dynamikken for dette systemet ved Lagrangetettheten
$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0\, V(z) - m \right] \psi, \tag{3}$$
der
$$V(z) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 \leq z \leq \ell \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{4}$$

a) Hvilken masse-dimensjon $D\{V_0\}$ har parameteren V_0 (i naturlige enheter)?

b) Skriv ned bevegelsesligningen for ψ-feltet.

c) Se nå spesielt på en partikkel som beveger seg i z-retningen: Gjør oppsplittingen
$$\psi = \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix},$$
der $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$ er to-komponent spinorer, og anta at løsningen har planbølge-form
$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim \mathrm{e}^{-i(\omega t - p_i z)},$$
der p_i, $i = 1, 2, 3$ kan anta forskjellige verdier i de tre områdene (1) $z < 0$, (2) $0 < z_0 < \ell$, og (3) $z > \ell$. Finn de resulterende algebraiske ligningene for $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$ i de tre områdene.

d) Finn sammenhengen mellom p og ω i de tre områdene.

e) Analyser spesielt oppførselen til p_2 ettersom V_0 økes fra $V_0 = 0$ til $V_0 = \infty$, og forsøk å gi en fysisk tolkning av denne oppførselen.

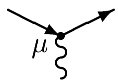
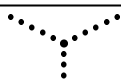
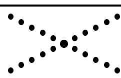
Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p_i')\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i'}{(2\pi)^3\,2E_i'} \tag{5}$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow p, s$	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\!\bullet$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k \cdots\cdots\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\!\overset{p}{\longrightarrow}\!\!\bullet$	$\dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$_\mu\bullet\!\overset{k}{\sim\!\sim\!\sim}\!\bullet_\nu$	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots\bullet$	$\dfrac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

i) Dirac partikler:

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m \tag{6}$$

ii) Dirac antipartikler:

$$\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{7}$$

iii) Fotoner:

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{8}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \tag{13}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \tag{14}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{18}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{19}$$