NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

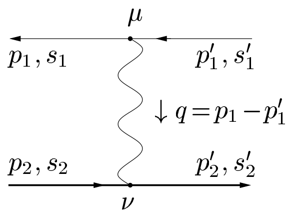
Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Løsningsforslag til
Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Mandag 6. juni 1998
Tid: 0900–1400

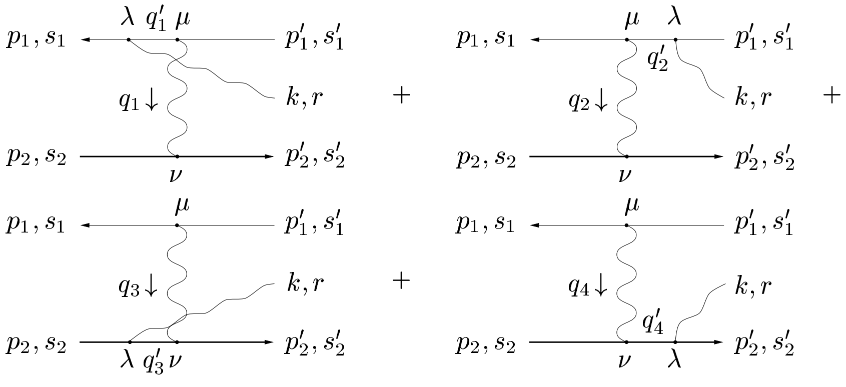
Oppgave 1:

a)

1. Laveste ordens Feynman diagram for prosessen $e^+\,\mu^- \to e^+\,\mu^-$ er



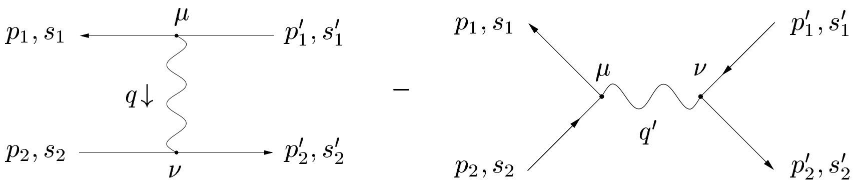
2. Prosessen $e^+\,\mu^- \to e^-\,\mu^+$ er ikke mulig (i QED eller noen annen eksperimentelt observert teori) på grunn av separat konservering av elektron- og myon-tall[1].
3. Laveste ordens Feynman diagrammer for prosessen $e^+\,\mu^- \to e^+\,\mu^-\,\gamma$ er



   Her er $q_1 = p_2' - p_2$, $q_1' = k - p_1$, $q_2 = p_2' - p_2$, $q_2' = -k - p_1'$, $q_3 = p_1 - p_1'$, $q_3' = p_2 - k$, $q_4 = p_1 - p_1'$, og $q_4' = k + p_2'$. Merk at vi må måle impuls langs indre fermionlinjer $(q_1', \ldots, q_4')$ i *pilens retning* for at det tilhørende algebraiske uttrykket for Dirac propagatoren skal bli lik $i(\not{q}_i' + m)/({q_i'}^2 - m^2 + i\epsilon)$.
4. Prosessen $e^+\,\mu^- \to \gamma\,\gamma$ er ikke mulig (i QED eller noen annen eksperimentelt observert teori) på grunn av separat konservering av elektron- og myon-tall (men jfr. fotnoten om dette).

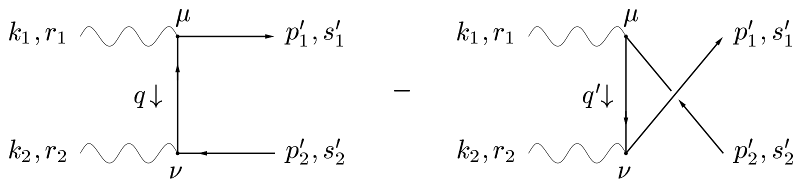
[1] Det er nylig (på NEUTRINO 98 konferansen i juni 1998) annonsert eksperimentelle resultater som tilsier at myon-tall ikke er en eksakt konservert størrelse i fysikken. Dette gir indirekte støtte til mistanken om at prosesser som konverterer myoner til elektroner (og *vice versa*) kan forekomme i fysikken, bare svært skjeldent.

5. Laveste ordens Feynman diagrammer for prosessen $e^+ e^- \to e^+ e^-$ er



Her er $q = p_1 - p'_1$ og $q' = p_1 + p_2$.

6. Prosessen $\mu^- \to e^- \gamma$ er ikke mulig (i QED eller noen annen eksperimentelt observert teori) på grunn av separat konservering av elektron- og myon-tall (men jfr. fotnoten om dette).
7. Prosessen $\gamma \to e^+ e^-$ er ikke mulig i vakuum på grunn av konservering av energi og bevegelsesmengde, dvs. firer-impuls. Fotonet har invariant en masse $k^2 = 0$, mens elektron-positron systemet må ha en invariant masse $(p'_1 + p'_2)^2 \geq 4\, m_e^2$.
8. Laveste ordens Feynman diagrammer for prosessen $\gamma\,\gamma \to \mu^+ \mu^-$ er

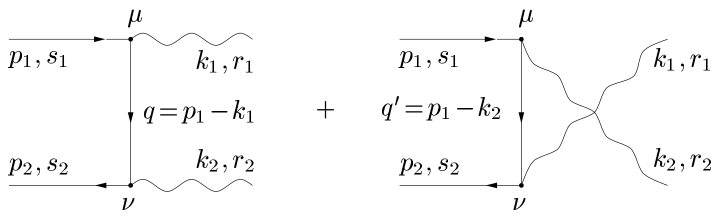


Her er $q = k_1 - p'_1$ og $q' = k_2 - p'_2$.

9. Prosessen $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e\, \nu_\mu$ er ikke mulig (i QED) fordi antallet myoner minus antallet antimyoner er konservert, og tilsvarende for antallet elektroner minus antallet positroner. Merk at dette er ikke det samme som konservering av myon-tall $(N_\mu - N_{\bar{\mu}} + N_{\nu_\mu} - N_{\bar{\nu}_\mu})$ eller elektron-tall $(N_e - N_{\bar{e}} + N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e})$. Denne prosessen er mulig i svake vekselvirkninger.
10. Prosessen $\mu^- \to e^+ e^- \mu^-$ er ikke mulig i vakuum på grunn av konservering av energi og bevegelsesmengde, dvs. firer-impuls. Det innkommende myonet har en invariant masse $p^2 = m_\mu^2$, mens $e^+ e^- \mu^-$-systemet har en ivariant masse $(p'_1 + p'_2 + p'_3)^2 \geq (m_\mu + 2m_e)^2$.

b) Vi skulle i denne oppgaven se i litt mer detalj på elektron-positron annihilasjon, $e^+e^- \to \gamma\gamma$.

1. Feynman-diagrammene for laveste ordens bidrag til denne prosessen er



Vi kaller de to amplitudene for henholdsvis $\mathcal{M}_{fi}^{(a)}$ og $\mathcal{M}_{fi}^{(b)}$.

2. Vi har $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}$, med

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = \frac{i\,(ie)^2}{q^2 - m_e^2}\; \bar{v}(p_2, s_2)\gamma^\nu(\not{q} + m_e)\gamma^\mu u(p_1, s_1)\; e_\mu(k_1, r_1)^*\, e_\nu(k_2, r_2)^*, \tag{1}$$

med $q = p_1 - k_1$, og

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{i\,(ie)^2}{q'^2 - m_e^2}\; \bar{v}(p_2, s_2)\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu u(p_1, s_1)\; e_\mu(k_2, r_2)^*\, e_\nu(k_1, r_1)^*, \tag{2}$$

med $q' = p_1 - k_2$.

3. Vi har

$$\mathcal{M}_{fi}^{(a)*} = \frac{e^2}{q^2 - m_e^2}\,\bar{u}(p_1,s_1)\gamma^\lambda(\not{q} + m_e)\gamma^\sigma v(p_2,s_2)\,e_\lambda(k_1,r_1)\,e_\sigma(k_2,r_2),$$
$$\mathcal{M}_{fi}^{(b)*} = \frac{e^2}{q'^2 - m_e^2}\,\bar{u}(p_1,s_1)\gamma^\lambda(\not{q}' + m_e)\gamma^\sigma v(p_2,s_2)\,e_\lambda(k_2,r_2)\,e_\sigma(k_1,r_1),$$

så når vi skriver ut spinor-indeksene $(\alpha,\ldots,\delta,\bar{\alpha},\ldots,\bar{\delta})$ eksplisitt får vi

$$\mathcal{M}_{fi}^{(a)}\,\mathcal{M}_{fi}^{(a)*} = \frac{e^4}{(q^2 - m_e^2)^2}\,e_\mu(k_1,r_1)^*\,e_\nu(k_2,r_2)^*\,e_\lambda(k_1,r_1)\,e_\sigma(k_2,r_2)\,\times$$
$$v(2)_{\bar{\delta}}\bar{v}(2)_\alpha\,\gamma^\nu_{\alpha\beta}\,(\not{q} + m_e)_{\beta\gamma}\,\gamma^\mu_{\gamma\delta}\,u(1)_\delta\bar{u}(1)_{\bar{\alpha}}\,\gamma^\lambda_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\,(\not{q} + m_e)_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}\,\gamma^\sigma_{\bar{\gamma}\bar{\delta}} \tag{3}$$

Her er $u(1)$ forenklet notasjon for $u(p_1,s_1)$ osv. Vi summerer over r_1, r_2 og bruker fullstendighetsrelasjonen,

$$\sum_r e_\mu(k,r)^*\,e_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd.}$$

Altså

$$\sum_{r_1,r_2} e_\mu(k_1,r_1)^*\,e_\nu(k_2,r_2)^*\,e_\lambda(k_1,r_1)\,e_\sigma(k_2,r_2) = \eta_{\mu\lambda}\,\eta_{\nu\sigma} + \text{irrelevante ledd.}$$

Vi midler over s_1, s_2 og bruker fullstendighetsrelasjonene,

$$\sum_{s_1} u(p_1,s_1)_\delta\bar{u}(p_1,s_1)_{\bar{\alpha}} = (\not{p}_1 + m_e)_{\delta\bar{\alpha}}\,,$$
$$\sum_{s_2} v(p_2,s_2)_{\bar{\delta}}\bar{v}(p_2,s_2)_\alpha = (\not{p}_2 - m_e)_{\bar{\delta}\alpha}\,.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_{fi}^{(a)}\,\mathcal{M}_{fi}^{(a)*}} &= \frac{e^4}{4\,(q^2 - m_e^2)^2}\;\times\\ &\quad \mathrm{Tr}\left\{(\not{p}_2 - m_e)\;\gamma^\nu\;(\not{q} + m_e)\;\gamma^\mu\;(\not{p}_1 + m_e)\;\gamma_\mu\;(\not{q} + m_e)\;\gamma_\nu\right\} \qquad (4)\\ &\equiv \frac{e^4}{4\,(q^2 - m_e^2)^2}\,T^{(aa)}.\end{aligned}$$

som avviker fra det (feilaktig!) oppgitte uttrykket i oppgaveteksten ved

$$(\not{p}_2 + m_e) \to (\not{p}_2 - m_e).$$

For å se dette må vi bruke den sykliske egenskapen til spor.

4.

Vi ekspanderer sporet i ligning (4) i potenser av m_e, og tar i betraktning at spor over et odde antall γ-matriser forsvinner:

$$\begin{aligned}T^{(aa)} &= \mathrm{Tr}\,\{\not{p}_2\,\gamma^\nu\,\not{q}\,\gamma^\mu\not{p}_1\,\gamma_\mu\not{q}\gamma_\nu\,\} + m_e^2\,\mathrm{Tr}\,\{(\not{p}_2\,\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\gamma_\mu\gamma_\nu) + (\not{p}_2\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\mu\gamma_\nu)\\ &+ (\not{p}_2\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\gamma_\mu\not{q}\gamma_\nu) - (\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\mu\gamma_\nu) - (\gamma^\nu\,\not{q}\gamma^\mu\gamma_\mu\not{q}\gamma_\nu) - (\gamma^\nu\,\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\mu\not{q}\gamma_\nu)\}\\ &- m_e^4\,\mathrm{Tr}\,\{\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\}\\ &= 4\,\mathrm{Tr}\,\{\not{p}_2\,\not{q}\,\not{p}_1\,\not{q}\} + m_e^2\,\mathrm{Tr}\,\{-16\,(\not{p}_2\,\not{q}) + 4\,(\not{p}_2\,\not{p}_1)\\ &+ 16\,(\not{q}\,\not{p}_1) - 16(\not{q}\,\not{q})\} - m_e^4\,\mathrm{Tr}\,\{16\}\\ &= 32\,(p_1\,q)(p_2\,q) - 16\,(p_1\,p_2)\,q^2\\ &+ m_e^2\left[64\,(p_1\,q) - 64\,(p_2\,q) + 16\,(p_1\,p_2) - 64\,(q^2)\right] - 64\,m_e^4.\end{aligned} \tag{5}$$

5. Vi kan utføre beregningen i massesenter systemet, for siden q^2 er Lorentz invariant blir resultatet det samme uansett hvilket intertialsystem vi regner i.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{s}, 0, 0, \sqrt{s - m_e^2}\right), \\ p_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{s}, 0, 0, -\sqrt{s - m_e^2}\right) \\ k_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{s}\,\left(1, \sin\vartheta\,\cos\varphi, \sin\vartheta\,\sin\varphi, \cos\vartheta\right), \\ k_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{s}\,\left(1, -\sin\vartheta\,\cos\varphi, -\sin\vartheta\,\sin\varphi, -\cos\vartheta\right). \end{aligned}$$

Vi finner da at

$$q^2 = (p_1 - k_1)^2 = -\left(\vec{p}_1 - \vec{k}_1\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(s - m_e^2\right) - \frac{1}{4}\,s + \frac{1}{2}\,\sqrt{s\left(s - m_e^2\right)}\,\cos\vartheta, \tag{6}$$

og derved

$$q^2_{\min} = -\frac{1}{4}\,\left(\sqrt{s} + \sqrt{s - m_e^2}\right)^2 \tag{7}$$

$$q^2_{\max} = -\frac{1}{4}\,\left(\sqrt{s} - \sqrt{s - m_e^2}\right)^2. \tag{8}$$

6.

Vi gjentar prosedyren fra punkt 3, og finner

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^{(a)}_{fi}\,\mathcal{M}^{(b)*}_{fi}} &= \frac{e^4}{4\left(q^2 - m_e^2\right)\left(q'^2 - m_e^2\right)} \times \\ &\quad \mathrm{Tr}\,\left\{\left(\not{p}_2 - m_e\right)\gamma^\nu\left(\not{q} + m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m_e\right)\gamma_\nu\left(\not{q}' + m_e\right)\gamma_\mu\right\} \qquad (9) \\ &\equiv \frac{e^4}{4\left(q^2 - m_e^2\right)\left(q'^2 - m_e^2\right)}\,T^{(ab)} \\ \overline{\mathcal{M}^{(b)}_{fi}\,\mathcal{M}^{(a)*}_{fi}} &= \frac{e^4}{4\left(q'^2 - m_e^2\right)\left(q^2 - m_e^2\right)} \times \\ &\quad \mathrm{Tr}\,\left\{\left(\not{p}_2 - m_e\right)\gamma^\nu\left(\not{q}' + m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m_e\right)\gamma_\nu\left(\not{q} + m_e\right)\gamma_\mu\right\} \qquad (10) \\ &\equiv \frac{e^4}{4\left(q'^2 - m_e^2\right)\left(q^2 - m_e^2\right)}\,T^{(ba)} \\ \overline{\mathcal{M}^{(b)}_{fi}\,\mathcal{M}^{(b)*}_{fi}} &= \frac{e^4}{4\left(q'^2 - m_e^2\right)^2} \times \\ &\quad \mathrm{Tr}\,\left\{\left(\not{p}_2 - m_e\right)\gamma^\nu\left(\not{q}' + m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m_e\right)\gamma_\mu\left(\not{q}' + m_e\right)\gamma_\nu\right\} \qquad (11) \\ &\equiv \frac{e^4}{4\left(q'^2 - m_e^2\right)^2}\,T^{(bb)}. \end{aligned}$$

Oppgave 2:

I denne oppgaven skulle vi studere modellen definert ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{1}{2}\,\mu_a\,\sigma^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} - m\right]\psi, \tag{12}$$

der $F_{\mu\nu}$ er et å regne som et eksternt (dvs. ikke-dynamisk) felt.

a)

I et 4-dimensjonalt tid-rom (og naturlige enheter) har Lagrange-tettheten (masse-)dimensjon $D\{\mathcal{L}\} = 4$, og $D\{\partial_\mu\} = 1$. Da kan vi lese ut av ligning (12) at $D\{\overline{\psi}\,\psi\} = 3$ (siden γ^μ er dimensjonsløs). Det bør videre være kjent at Lagrange-tettheten for det fri elektromagnetiske felt har formen $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, slik at

$$D\{F_{\mu\nu}\} = D\{F^{\mu\nu}\} = 2$$

(siden vi opererer med en dimensjonsløs metrisk tensor). Derved finner vi

$$D\{\mu_a\} = D\{\mathcal{L}\} - D\{F_{\mu\nu}\} - D\{\overline{\psi}\,\psi\} = -1. \tag{13}$$

Kommentar:
Siden $D\{\mu_a\} < 0$ vil ikke denne modellen vært renormaliserbar hvis det elektromagnetiske feltet $F_{\mu\nu}$ også betraktes som dynamisk.

b) Euler-Lagrange ligningen lyder generelt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)},$$

der φ_a er en vilkårlig feltkomponent. I vårt tilfelle reduserer dette seg til Dirac-ligningen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2}\mu_a\, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right] \psi = 0. \tag{14}$$

c) Siden $F_{0i} = F_{i0} = 0$ har vi

$$\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sigma^{ij} F_{ij} = \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ij\ell} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} B^\ell = 2 \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{B} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{B} \end{pmatrix}$$

Hvis vi innfører 2×2 matrisen $b \equiv \mu_a\, \vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ kan ligning (14) skrives på formen

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - b - m & i\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\vec{\sigma}\cdot\nabla & -i\partial_t - b - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix} = 0.$$

Med planbølgeløsningen

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim \mathrm{e}^{-i(\omega t - \vec{p}\cdot\vec{r})}$$

vil $i\partial_t \to \omega$, $i\nabla \to -\vec{p}$, og med planbølgeløsningen

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{p}\cdot\vec{r})}$$

vil $i\partial_t \to -\omega$, $i\nabla \to \vec{p}$. Dette gir de algebraiske ligningene

$$\begin{pmatrix} \omega - m - b & -p\,\hat{\pi} \\ p\,\hat{\pi} & -\omega - m - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix} = 0, \tag{15}$$

og den tilsvarende ligningen med $\omega \to -\omega$, $p \to -p$. Her har vi innført

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \equiv |\,\vec{p}\,|\,\hat{\pi} \equiv p\,\hat{\pi}.$$

Merk at $\hat{\pi}\,\hat{\pi} = 1$ (dvs. 2×2 enhetsmatrisen).

d) Vi kan begynne med å se på ligningssystemet (15) generelt. Vi kan eliminere $w_\downarrow$ fra øverste rad ved å multiplisere med $\hat{\pi}$,

$$p\, w_\downarrow = \hat{\pi}(\omega - m - b)\, w_\uparrow.$$

Vi setter dette inn i nederste rad av (15), og får etter multiplikasjon med $p\,\hat{\pi}$

$$\left[p^2 - \hat{\pi}\,(\omega + m + b)\,\hat{\pi}\,(\omega - m - b)\right]\, w_\uparrow \equiv \mathcal{Q}\, w_\uparrow. \tag{16}$$

Betingelsen for ikke-triviell løsning av dette systemet er at det $\mathcal{Q} = 0$. Dette gir dispersjonsrelasjonen.

Når $\vec{B}$ og $\vec{p}$ peker i samme retning vil b og $\hat{\pi}$ kommutere, dvs. $\hat{\pi}\, b\, \hat{\pi} = b\, \hat{\pi}\, \hat{\pi} = b$. Ligning (16) kan da skrives på formen

$$\left[p^2 - \omega^2 + (m+b)^2\right]\, w_\uparrow = 0. \tag{17}$$

Det eneste som ikke er proporsjonalt med enhetmatrisen i denne ligningen er b som i standard representasjon har formen

$$b = \mu_a\, B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

slik at betingelsen for at determinanten skal forsvinne er at

$$\omega^2 = p^2 + (m \pm \mu_a\, B_0)^2, \tag{18}$$

som vi ser er invariant under $\omega \to -\omega$ og $p \to -p$. Så både "positiv frekvens" og "negativ frekvens" løsningene oppfyller dispersjonsrelasjonene

$$\omega = \sqrt{p^2 + (m \pm \mu_a\, B_0)^2}. \tag{19}$$