UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74350 KLASSISK FELTTEORI
Tirsdag 12. desember 1989
kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Fortell med få ord hva Noethers teorem dreier seg om.

En transformasjon av et felt

$$\phi^\alpha(x) \to \phi^{\alpha\prime}(x,\lambda) = F^\alpha(\phi_\beta(x),x,\lambda) = \phi^\alpha(x)+\lambda Q^\alpha(\phi_\beta,x)+\mathcal{O}(\lambda^2)$$

med tilhørende koordinat-transformasjon

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = f^\mu(x,\lambda) = x^\mu + \lambda R^\mu(x) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

er en symmetritransformasjon (med symmetriparameter λ) hvis feltets virkningsintegral er invariant ved transformasjonen:

$$\int_V d^4x \mathcal{L}\left\{\phi'(x),\partial_\mu\phi'(x),x\right\} = \int_{V'} d^4x' \mathcal{L}\left[\phi(x'(\lambda),\partial_{\mu'}\phi(x',\lambda),x'(\lambda)\right].$$

Da gjelder en tilhørende bevarelsessetning

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{med} \quad j^\mu = \pi^\mu_\alpha Q^\alpha - R^\mu \mathcal{L} \quad \text{hvor} \quad \pi^\mu_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} .$$

Lagrangetettheten for en svingende streng langs x-aksen er

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}K \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x_\mu} = K\sum_{\alpha=2}^{3}\left\{\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x}\right)^2\right\} .$$

Her er $\phi^\alpha = \phi_\alpha$, $\alpha = 2,3$, utslagene i y- og z-retningene mens koordinatene x^μ, $\mu = 0,1$, er $x^0 = x_0 = ct$, $x^1 = -x_1 = x$.

K er en konstant.

b) Undersøk om denne svingende strengen er symmetrisk ved

α) en rotasjon om x-aksen

$$\phi^{2\prime}(x,t) = \phi^2(x,t)\cos\vartheta - \phi^3(x,t)\sin\vartheta$$
$$\phi^{3\prime}(x,t) = \phi^2(x,t)\sin\vartheta + \phi^3(x,t)\cos\vartheta$$

β) en Lorentz-transformasjon langs x-aksen

$$x^{0\prime} = x^0\cosh\chi - x^1\sinh\chi$$
$$x^{1\prime} = -x^0\sinh\chi + x^1\cosh\chi$$
$$\cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad \beta = \frac{v}{c}$$

c) Finn i tilfelle den tilhørende bevarelseslikning og hvilken global størrelse som blir bevart.

Oppgave 2

Bevegelseslikningene for en partikkel i et gravitasjonsfelt gitt ved metrikken $g_{\mu\nu}(x)$ er

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

med

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right) .$$

For et svakt statisk felt kan vi sette

$$g_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \qquad h_{\mu\nu} \text{ er små størrelser.}$$

Her er Minkowskimetrikken

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial h_{\mu\mu}}{\partial t} = 0\ , \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = 0 \qquad \begin{matrix} \mu = 0,1,2,3 \\ i,j = 1,2,3 \end{matrix} .$$

Vis at da er $\Gamma_{k_0\ell} + \Gamma_{\ell_0 k} = 0$.

Videre kan en sette $\tau = t$ og benytte $G_{\mu\nu}$ til å senke indekser.

Vis at for en langsom partikkel $\left(v^k = \frac{dx^k}{dt} << c\right)$ kan bevegelseslikningene for de romlige komponentene tilnærmet skrives på formen

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f} + 2\left[\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{\omega}\right]$$

hvor $f^i = -c^2\Gamma^i{}_{00}$

og $\omega^i = \frac{c}{2}\,\epsilon^{i\ell m}\Gamma_{\ell o m}$

og bestem f^i og ω^i, til laveste orden i $h_{\mu\nu}$ og v^k, som funksjoner av $\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$.

ϵ^{ijk} er Levi-Civita-symbolet. Formel: $-\epsilon^{ijk}\epsilon_{i\ell m} = \delta^j{}_\ell\delta^k{}_m - \delta^j{}_m\delta^k{}_\ell$.

b) Feltlikningen for gravitasjonsfeltet $g_{\mu\nu}(x)$ fra en kilde $T_{\mu\nu}$

er

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \quad k = \text{gravitasjonskonstanten}$$

med

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa}\Big)$$

$$T = T^\mu{}_\mu .$$

For en kilde med lav massetetthet ρ og små hastigheter V^i kan en bruke for energi-impuls tensorens komponenter

$$T^{00} \approx \rho c^2 \quad T^{i0} \approx \rho c V^i , \quad T^{ij} \approx \rho V^i V^j \approx \mathcal{O}(V^2) .$$

Vis at feltlikningene for størrelsene $\vec{f}$ og $\vec{\omega}$ da blir tilnærmet

$$\nabla \times \vec{\omega} = \frac{8\pi k}{c^2}\rho\vec{V}$$

$$\nabla\vec{f} = -4\pi k\rho .$$

c) Finn gravitasjonsfeltet $(\vec{f},\vec{\omega})$ rundt en uendelig lang, tynn, rund, homogen stav i ro i et sylindrisk koordinatsystem (r,ϕ,z) og skriv opp bevegelseslikningen for radialbevegelsen for en liten partikkel utenfor staven.