

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74350 KLASSISK FELTTEORI

Fredag 24. august 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

- a) Hvordan finner en feltlikningene for et felt med n komponenter ψ_a $a = 1, 2, 3, \dots, n$ ut fra et variasjonsprinsipp

$$\delta \int \mathcal{L}(\psi_a, \partial_\mu \psi_a, x^\mu) d^4x = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad ?$$

- b) Lagrangetettheten for en svingende streng langs x -aksen er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} K \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\mu} = K \sum_{\alpha=2}^3 \left\{ \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x} \right)^2 \right\}.$$

Her er $\phi^\alpha = \phi_\alpha$, $\alpha = 2, 3$, utslagene i y - og z -retningene mens koordinatene x^μ , $\mu = 0, 1$, er $x^0 = x_0 = ct$, $x^1 = -x_1 = x$.

K er en konstant.

Finn bevegelseslikningene for strengen.

- c) Fortell med få ord hva Noethers teorem dreier seg om.

*

Hvis en transformasjon T_λ av et felt til et annet

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = F_a(\psi_b(x), x, \lambda) = \psi_a(x) + \lambda Q_a(\psi_b, x) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

er slik at det nye feltet $\psi'_a(x, \lambda)$, eventuelt med en forandring

$$\text{av koordinatene } x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = f^\mu(x, \lambda) = x^\mu + \lambda R^\mu(x) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

er en mulig feltutvikling hvis det gamle $\psi(x)$ er det, så er

T_λ en symmetritransformasjon. Da gjelder en tilhørende

bevarelsesetning

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{med} \quad j^\mu = \pi^{a\mu} Q_a - R^\mu \mathcal{L} \quad \text{hvor} \quad \pi^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_a)}.$$

- d) Undersøk om den svingende strengen i b) er symmetrisk ved en translasjon $T_b : \phi_\alpha(x^\mu) \rightarrow \phi'_\alpha(x^\mu) = \phi_\alpha(x^\mu - b^\mu)$ for alle komponentene α , og finn i tilfelle de tilhørende bevarelseslikningene.

Oppgave 2

Gravitasjonsfeltet rundt en punktmasse M er gitt ved Schwarzschild-intervallet

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad \epsilon = G \frac{M}{c^2}$$

G = gravitasjonskonstanten

- a) Finn ut fra virkningsintegralet $S = -mc \int ds$ bevegelseslikningene

$$\frac{d\phi}{dr} = f(r)$$

$$\text{og } \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = g\left(r, \vartheta, \frac{dr}{dr}, \frac{d\vartheta}{dr}, \frac{d\phi}{dr}\right)$$

for en liten partikkel med masse m rundt denne store massen M .

- b) Vis at partikkelens bane-dreieimpuls om z-aksen er konstant.
- c) Vis at partikkelen vil bevege seg i et plan.