UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74350 KLASSISK FELTTEORI
FREDAG 25. januar 1991
kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

Et felt med n komponenter $\phi_a(x)$, $a = 1,2,3,\ldots n$

har en Lagrangetetthet $\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a, x^\mu)$.

Hvis en transformasjon av feltet

$$\phi_a(x) \to \phi'_a(x) = F(\phi_a(x), x, \lambda) = \phi_a(x) + \lambda Q_a(\phi_a, x) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

(λ = symmetriparameter)

er slik at den nye Lagrangetettheten $\mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu\phi'_a, x^\mu)$ får samme funksjonsform som den gamle, så kalles transformasjonen en symmetritransformasjon for feltet.

Det finnes da en tilhørende lokal bevarelsessetning

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{med} \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} Q_a$$

og den globale størrelsen $\Omega(t) = \int_V j_0(\vec{r},t)d^3r$ er bevart,

$\frac{d\Omega}{dt} = 0$, når volumet V omfatter hele feltet.

a) Lagrangetettheten for et fritt elektromagnetisk felt er

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

med feltstyrkene $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$

og potensialet $A^\alpha(x) = (\frac{1}{c}\phi(\vec{r},t), \vec{A}(\vec{r},t))$.

i) Finn feltlikningene for $F_{\mu\nu}$ og A^μ.

ii) Vis at det elektromagnetiske feltet er symmetrisk under gaugetransformasjonen $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \epsilon\partial_\mu\chi(x)$.

ϵ: transformasjonsparameteren, $\chi(x)$: vilkårlig funksjon av $\vec{r}$ og t

iii) Hvordan blir i dette tilfellet den lokale bevarelsessetning? Hva blir strømtettheten j^μ og størrelsen Ω når χ = konstant?

b) Lagrange tettheten for et elektron i et ytre elektromagnetisk felt A^μ er

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left[c(\gamma^\mu(\frac{\hbar}{i}\,\partial_\mu - eA_\mu) + mc\right]\psi \;.$$

Her er $\psi(x,t)$ tilstandsfunksjonen for elektronet, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ og γ^μ er de konstante Diracmatrisene.

i) Finn feltlikningen for $\psi(x)$.

ii) Vis at gaugetransformasjonen

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{+\,ie\chi(x)/\hbar}\,\psi(x)$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x)$$

er en symmetriformasjon.

iii) Finn bevarelsessetningen her. Hva blir strømtettheten j_μ og totalladningen Ω når χ = konstant.

<u>Oppgave 2</u>

Einsteins feltlikninger for metrikken $g_{\mu\nu}(x)$ er (når den kosmiske konstanten $\Lambda = 0$)

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu} \;.$$

Her er G gravitasjonskonstanten

$T_{\mu\nu}$ er energiimpulstensoren for kildene til gravitasjonsfeltet

$\mathcal{R}$ er den skalare krumning

$\mathcal{R}_{\mu\nu}$ er Ricci-tensoren

$\mathcal{R}^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ er krumningstensoren

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}\,\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\,\mathcal{R}^\kappa{}_{\mu\kappa\nu}$$

$$= g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\rho\kappa}\,\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\rho\nu}\,\Gamma^\rho{}_{\mu\kappa}\right)$$

Christoffelsymbolet er

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right) .$$

Robertson-Walker-metrikken er i et hensiktsmessig koordinat-system $x^\mu = (ct, r, \vartheta, \phi)$ gitt ved

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = c^2dt^2 - (R(t))^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\phi^2\right)$$

k = konstant.

Den brukes til en grov beskrivelse av universet som da er isotropt og homogent. $R(t)$ (bare avhengig av t) angir da en målestokk for romlige avstander i dette universet ved tiden t.

Universet oppfattes da som en ideell gass med jevnt fordelt massetetthet $\rho(t)$ og trykk $p(t)$ slik at energi-impulstensoren blir

$$T_{00} = \rho c^2 \; , \; T_{ik} = - p(t)\, \delta_{ik} \; , \; T_{io} = T_{ok} = 0 \; .$$

a) Vis at $g_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^{\ \lambda}$ og skriv opp metrikkene $g_{\mu\nu}$ og $g^{\mu\nu}$.

Hva betyr den tiden som er benyttet her?

b) Vis at $\Gamma^1{}_{01} = \dfrac{\frac{dR}{d(ct)}}{R} = \dfrac{\dot{R}}{R}$, $\mathcal{R}_{00} = -3\,\dfrac{\ddot{R}}{R}$ og

$$\mathcal{R} = -6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) .$$

De andre komponentene oppgis:

$$\Gamma^\mu{}_{00} = 0 \; , \; \Gamma^i{}_{oj} = \Gamma^i{}_{jo} = \frac{\dot{R}}{R}\,\delta^i{}_j \, , \; \Gamma^0{}_{ij} = -\frac{\dot{R}}{R}\, g_{ij}$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\, g^{i\ell}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell}\right)$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\,\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\,\frac{k}{R^2}\right) g_{ij} \; , \quad R_{oi} = 0 \; .$$

c) Sett opp Einsteins likning for $\mu=0$, $\nu=0$. Anta at etter en tid er "gassen" så fortynnet at en kan sette trykket $p=0$ og at den totale masse innenfor et kuleskall med radius $R(t)$ er konstant d.v.s. $\rho(t)R^3(t)$ = konstant. Finn t-avhengigheten $R(t)$ hvis $k=0$.

d) Gi en kvalitativ beskrivelse av tidsforløpet av universets størrelse hvis $k > 0$.