UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FAG 74350 KLASSISK FELTTEORI
TIRSDAG 14.januar 1992
kl.0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barrett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

Et kompleks vektor-masse-felt W^μ har Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2} G^*_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \kappa^2 W^*_\mu W^\mu \quad \text{hvor} \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

a) Finn i) feltlikningene

ii) den kanoniske energi-impulstensor $\mathcal{T}_K^{\mu\nu}$

iii) den symmetriske Belinfantetensoren $\mathcal{T}_B^{\mu\nu}$

iv) et uttrykk for feltets indre spinn.

b) Hvilken global gaugesymmetri oppfyller dette feltet W^μ ?
Kan Lorentzbetingelsen $\partial_\nu W^\nu = 0$ benyttes for dette feltet?

c) Ved å koble et gaugefelt B^λ til feltet W^μ kan en oppnå at det totale feltsystemet (W^μ, B^λ) oppfyller en tilsvarende lokal gaugesymmetri. Hvordan må dette feltet B^λ

i) kobles til det opprinnelige feltet W^μ ?

ii) transformere ved denne lokale gaugetransformasjonen?

Oppgitt: For et reelt skalarfelt ϕ med Lagrangetetthet $\mathcal{L}$ er den kanoniske energi-impulstensoren

$$\mathcal{T}_K^{\mu\upsilon} = \partial^\mu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} - g^{\mu\upsilon}\mathcal{L}$$

og den generaliserte 4-dimensjonale dreieimpulstensoren

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\upsilon} = \frac{1}{c}(x^\mu \mathcal{T}^{\upsilon\lambda} - x^\upsilon \mathcal{T}^{\mu\lambda})$$

hvor komponentene $\mathcal{M}^{0k\ell}$ angir den vanlige 3-dimensjonale dreieimpulsen.

For et kompleks skalart Klein-Gordon felt ϕ^*,ϕ som er koblet til et elektromagnetisk felt A^μ er Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -c^2[(\hbar\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^*[(\hbar\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - m^2c^4\phi^*\phi \ .$$

Oppgave 2

I et koordinatsystem $x^\mu = (ct,\vec{x})$ med metrikk $g_{\mu\nu}$ er det infinitesimale intervallet

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \ .$$

a) Koordinattiden mellom to hendinger 1 og 2 på en fast plass ($\vec{x}$=konst) i koordinatsystemet er $\Delta t = t_2 - t_1$.

Hvor lang tid $\Delta\tilde{t}$ mellom hendingene vil en observatør som står i ro på denne plassen i koordinatsystemet måle på sin egen standardklokke?

Den romlige avstanden $d\tilde{\ell}$ til et nærliggende punkt $\vec{x}+\vec{dx}$ som denne observatøren måler er gitt ved

$$d\tilde{\ell}^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k = \left(\frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}\right)dx^i dx^k \qquad i,k=1,2,3$$

I gravitasjonsfeltet rundt en kulesymmetrisk masse M i ro er det infinitesimale intervallet med et passende polarkoordinatsystem $x^\mu = (ct,r,\vartheta,\phi)$ gitt ved

$$ds^2 = (1-\frac{\epsilon}{r})c^2dt^2 - (1-\frac{\epsilon}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\phi^2) \quad , \quad \epsilon = \frac{2GM}{c^2} \ .$$

En liten partikkel faller i dette feltet rett inn mot $r = 0$ (med ϑ og ϕ konstante).

b) Sett opp bevegelseslikningene for t og r og finn koordinathastighetene u^0 og u^r ($u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ med τ lik partikkelens egentid) som funksjon av r når partikkelen startet med $u^r = 0$ i $r=R$, $\vartheta=\vartheta_0$, $\phi=\phi_0$.

c) Anta at $R = \infty$ og finn $r = r(\tau)$.

d) Hvilken hastighet vil en observatør som ligger i ro ved r_0, ϑ_0, ϕ_0 måle for denne partikkelen idet den passerer han?