UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F. BAKKE
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74350 KLASSISK FELTTEORI

Onsdag 20.januar 1993

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

Gitt Lagrangetettheten $\mathcal{L}(\phi_n, \partial_\mu \phi_n)$ for et felt med N komponenter $\phi_n(\vec{x},t)$, $n = 1,2,\ldots N$.

a) Hvordan ser de generelle feltlikningene for dette tilfellet ut?

b) Vis at energiimpulstensoren $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \partial^\nu \phi_n - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$

tilfredstiller bevarelsesloven

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3 \quad .$$

c) Vis at dreieimpulstettheten $\mathcal{M}^0{}_i = \frac{1}{c}\,\epsilon_{ijk}\, x^j\, \mathcal{T}^{0k}$,

$i,j,k = 1,2,3$ tilfredstiller en tilsvarende bevarelseslikning når energiimpulstensoren er symmetrisk $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\nu\mu}$.

ϵ_{ijk} er det totale antisymmetriske Levi-Civita symbolet.

d) Hvilke bevarelsessetninger følger fra disse når feltet har en endelig utstrekning i rommet?

e) Hvilke invarianskrav må Lagrangetettheten for et felt oppfylle

i) i klassisk mekanikk?

ii) i den spesielle relativitetsteori?

f) Undersøk om disse kravene er oppfylt for følgende Lagrangetetthet for et klassisk elastisk felt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\frac{\partial u^i}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u^k}{\partial t}\frac{\partial u^k}{\partial t} \qquad i,k = 1,2,3$$

Feltstørrelsen er her forskyvningen ut fra likevektsstillingen ved deformasjonen $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{r}' - \vec{r}$

ρ er massetettheten (antas konstant),

μ, λ er elastisitetskonstanter.

Kan du angi noen andre krav en kan stille til denne Lagrange-tettheten?

g) Finn komponentene av den kanoniske energi-impulstensoren for dette feltet og undersøk om den er symmetrisk. Hva kan en slutte av resultatet?

Oppgave 2

I gravitasjonsfeltet rundt solen er metrikken gitt ved

$$ds^2 = (1 - \frac{\epsilon}{r})c^2dt^2 - \frac{1}{1-\frac{\epsilon}{r}}dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\phi^2) \;.$$

ϵ er konstant.

Finn bevegelseslikningene $\frac{d\phi}{d\sigma} = f(r)$, $\frac{dt}{d\sigma} = g(r)$

og $\frac{dr}{d\sigma} = h(r)$ for lysstråler som beveger seg i planet $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

(σ er en baneparameter).