

UNIVERSITETET I TRONDHEIM  
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:  
Navn: Jan Myrheim  
Telefon: 3653

**Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori**  
Mandag 17. januar 1994  
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.  
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.  
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae*.  
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*.

Nyttige konstanter:

Newtons gravitasjonskonstant:  $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Lyshastigheten i vakuum:  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$

Den reduserte Plancks konstant:  $\hbar = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J s}$

### Oppgave 1:

- Forklar kort hva Einsteins ekvivalensprinsipp går ut på, og hvordan det kan testes eksperimentelt (nevnt minst en metode).
- Hva er gravitasjonsrødforskyving?
- Arnt og Bernt er like gamle (eneggete tvillinger) og bor i Trondheim. Arnt flytter til månebasen Tycho (i år 2094) og bor på månen i ett år før Bernt kommer etter. Hvem av dem er eldst når de møtes på månen, og hvor mye?  
Jorda har masse  $M_J = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$  og radius  $R_J = 6400 \text{ km}$ .  
Månen har masse  $M_M = 7,4 \times 10^{22} \text{ kg}$  og radius  $R_M = 1700 \text{ km}$ .  
Avstanden mellom jorda og månen er  $R_{JM} = 380\,000 \text{ km}$ .
- Russell A. Hulse og Joseph H. Taylor, Jr fikk Nobelprisen i fysikk i 1993 for å ha observert en effekt forutsagt av den generelle relativitetsteorien. Hvilken effekt, og hvordan observerte de den?

**Oppgave 2:**

En partikkel med masse  $m$  har posisjonen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  ved tiden  $t$ , og vekselvirker med et skalarfelt  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ . Koblingen til feltet er gitt ved en koblingskonstant (eller "ladning")  $q$ .  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  er hastigheten til partikkelen, og Lagrangefunksjonen er

$$L = -(mc^2 + q\Phi) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

- a) Vis at Hamiltonfunksjonen er

$$H = \sqrt{(mc^2 + q\Phi)^2 + \mathbf{p}^2 c^2},$$

der  $\mathbf{p}$  er den kanoniske impulsen.

- b) Gjør rede for den ikke-relativistiske grensen.  
 c) Finn bevegelsesligningene, både Euler-Lagrange-ligningene og Hamiltons ligninger. Regn eksakt, uten ikke-relativistisk tilnærming.  
 d) Hvilke bevaringslover gjelder dersom feltet  $\Phi$  er tidsuavhengig og rotasjonssymmetrisk om origo, dvs. at  $\Phi = \Phi(|\mathbf{r}|)$ ?

**Oppgave 3:**

Et skalarfelt (Klein-Gordon-felt)  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$  har et annet felt  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  som kilde. Lagrangetettheten er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \Phi)^2 - \lambda^2 \Phi^2 \right) - \rho \Phi. \quad (1)$$

$\lambda$  er en ikke-negativ konstant, proporsjonal med massen til feltet  $\Phi$ . (I det "naturlige enhetssystemet", med  $\hbar = c = 1$ , er  $\lambda$  lik massen.)

- a) Hva menes med at  $\Phi$  transformeres som et skalarfelt?  
 b) Finn feltligningen for  $\Phi$  som følger av Lagrangetettheten i ligning (1).  
 c) Hvordan må kildefeltet  $\rho$  transformeres under Poincaré-transformasjoner (translasjoner i rom og tid, rotasjoner, Lorentz-transformasjoner) for at feltligningen skal være Poincaré-invariant?

- d) Hvis kilden er en punktformet "ladning"  $Q$ , som har posisjonen  $\mathbf{R}(t)$  ved tiden  $t$ , og hvis  $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ , så er tettheten  $\rho$  gitt ved at

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Q \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) .$$

(Diracs  $\delta$ -funksjon i tre dimensjoner defineres ved at

$$\int d^3\mathbf{r} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{0})$$

for en vilkårlig funksjon  $f = f(\mathbf{r})$  som er kontinuerlig i  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .)  
Anta at punktladningen  $Q$  ligger i ro i origo, altså at  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{0}$ .  
Vis at da er Yukawa-potensialet

$$\Phi(r) = k \frac{e^{-\lambda r}}{r} \tag{2}$$

en løsning av feltligningen, og finn konstanten  $k$ . Her er  $r = |\mathbf{r}|$ .

- e) Ligning (2) viser at  $1/\lambda$  er et mål på rekkevidden av vekselvirkningen som formidles av feltet  $\Phi$ . Hvor stor er massen til Klein-Gordon-feltet  $\Phi$  dersom  $1/\lambda = 1$  meter?
- f) Når er kraften mellom to punktladninger  $Q$  og  $q$  tiltrekkende, i følge denne teorien, og når er kraften frastøtende?