Eksamen 17. januar 1994

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Ekvivalensprinsippet: gravitasjonskrefter og treghetskrefter er ekvivalente (treghetskrefter er såkalte „fiktivekrefter" som opptrer i et akselerert koordinatsystem). Det betyr at forholdet

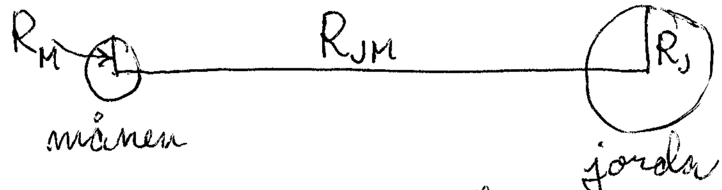
$$\alpha = \frac{\text{„tung" masse}}{\text{„treg" masse}}$$

er det samme for alle stoffer.

Et enkelt eksperiment som tester dette, er å se om like lange pendler med lodd av ulike materialer har samme svingetid. Akselerasjonen, og dermed svingefrekvensen, er proporsjonal med α. Newton gjorde dette eksperimentet, og oppnådde en nøyaktighet på 10^{4}. Baron Eötvös oppnådde bedre nøyaktighet med sitt eksperiment, nemlig 10^{-9}. Han sammenlignet forholdet mellom tyngdekraft (tiltrekning fra jorda) og sentrifugalkraft (pga. jordrotasjonen) for ulike stoffer.

b) Gravitasjonsrødforskyving: spektrallinjer i lyset fra et atom i et sterkt gravitasjonsfelt (f. eks. på overflaten av en hvit dvergstjerne) forskyves mot rødt, når lyset observeres av en observatør utenfor feltet.

c) Arnt blir eldre enn Bernt, fordi gravitasjonspotensialet er høyere på månen enn på jorda.
Her ser vi bort fra effekter som tidsdilatasjon (pga. jordrotasjonen), og innvirkning fra sola og andre planeter.



Gravitasjonspotensial på jorda:

$$\Phi_J = -G\frac{M_J}{R_J} - G\frac{M_M}{R_{JM}} = -\left(6{,}3\times 10^{7} + 1{,}3\times 10^{4}\right)\frac{m^2}{s^2} = -6{,}3\times 10^{7}\,\frac{m^2}{s^2}$$

og på månen:

$$\Phi_M = -G\frac{M_M}{R_M} - G\frac{M_J}{R_{JM}} = -\left(2{,}9\times 10^{6} + 1{,}1\times 10^{6}\right)\frac{m^2}{s^2} = -4{,}0\times 10^{6}\,\frac{m^2}{s^2}$$

Egentid for $\begin{cases} \text{Arnt på månen: } \Delta\tau_A \\ \text{Bernt på jorda: } \Delta\tau_B \end{cases}$

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} \approx \frac{1+\frac{\phi_M}{c^2}}{1+\frac{\phi_J}{c^2}} \approx 1+\frac{\phi_M-\phi_J}{c^2} = 1+\frac{5{,}9\times10^{7}\,m^2/s^2}{9{,}0\times10^{16}\,m^2/s^2} = 1+6{,}6\times10^{-10}$$

Arnt blir så mye eldre:

$$6{,}6\times10^{-10}\times 1\text{ år} = 6{,}6\times10^{-10}\times 365\times24\times3600\,s = \underline{\underline{0{,}021\,s}}$$

1d) Hulse og Taylor observerte gravitasjonsstråling.
De observerte at omløpstiden for en dobbeltstjerne, der den ene stjernen er en pulsar, minker, og forklarte det med at systemet mister energi, slik at avstanden mellom stjernene minker, på grunn av gravitasjonsstråling.

Oppgave 2

a) Kanonisk impuls:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(m+\frac{q\phi}{c^2}\right)\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (\text{der } v=|\vec{v}|)$$

Det gir at

$$p^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = (mc^2+q\phi)^2\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2c^2}{(mc^2+q\phi)^2+p^2c^2}$$

Hamiltonfunksjon:

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = (mc^2+q\phi)\left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{mc^2+q\phi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Anta at $q\phi$ er „liten", i den forstand at $|q\phi| < mc^2$. Da er

$$H = \frac{mc^2+q\phi}{\sqrt{1-\frac{p^2c^2}{(mc^2+q\phi)^2+p^2c^2}}} = \sqrt{(mc^2+q\phi)^2+p^2c^2}$$

QED

2 b) Ikke-relativistisk grense: $c \to \infty$

Bruk at $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ når $|x| \ll 1$.

Lagrangefunksjonen:

$$L \approx -(mc^2 + q\phi)\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \approx \underbrace{-mc^2}_{\text{konstant, kan sløyfes}} \underline{\underline{- q\phi + \frac{1}{2}mv^2}}$$

Hamiltonfunksjonen:

$$H = \sqrt{m^2c^4 + 2mc^2 q\phi + q^2\phi^2 + p^2c^2}$$

$$\approx mc^2\sqrt{1 + \frac{2q\phi}{mc^2} + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2\left(1 + \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)$$

$$= \underbrace{mc^2}_{\text{konstant, kan sløyfes}} + \underline{\underline{q\phi + \frac{p^2}{2m}}}$$

c) Euler-Lagrange-ligningene:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q(\nabla\phi)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c^2}\frac{d\phi}{dt}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \left(m + \frac{q\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{v}\cdot\nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Altså:

$$\underline{\underline{\left(m + \frac{q\phi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -q(\nabla\phi)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{q}{c^2}\frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\phi\right)\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}}$$

Hamiltons ligninger:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{c^2\vec{p}}{H}$$

$$\underline{\underline{\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{(mc^2 + q\phi)\,q\nabla\phi}{H}}}$$

d) Hvis ϕ er tidsuavhengig, er H (energien) bevart:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0} = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\right) = 0$$

Hvis $\phi = \phi(r,t)$, der $r = |\vec{r}|$, er impulsmomentet $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ bevart:

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}(\nabla r) = \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{c^2\vec{p}}{H}\right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(-\frac{(mc^2+q\phi)q\nabla\phi}{H}\right) = 0$$

Oppgave 3

a) Under en transformasjon $(\vec{r},t) \rightarrow (\tilde{\vec{r}},\tilde{t})$ av rom og tid flyttes funksjonsverdien $\phi(\vec{r},t)$ fra $(\vec{r},t)$ til $(\tilde{\vec{r}},\tilde{t})$. Dvs. at det transformerte feltet $\tilde{\phi}$ er definert ved at $\tilde{\phi}(\tilde{\vec{r}},\tilde{t}) = \phi(\vec{r},t)$. (Dette er definisjonen på en aktiv transformasjon)

b) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}\right) - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\lambda^2\phi - \rho$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} = -\nabla\phi$$

Altså blir feltligningen:

$$\underline{\underline{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \nabla^2\phi - \lambda^2\phi = \rho}}$$

c) Venstresiden av feltligningen transformeres som et skalarfelt. For at ligningen skal være invariant, må høyresiden ρ også transformeres som et skalarfelt. Samme konklusjon kommer vi til ved å forlange at Lagrangetettheten $\mathcal{L}$ skal være et skalarfelt.

3d) Hvis $\vec{R}(t)=0$, er $\rho(\vec{r},t) = Q\,\delta^{(3)}(\vec{r})$

Vi skal vise at $\phi = k\frac{e^{-\lambda r}}{r}$ er en løsning av ligningen

(*) $\nabla^2\phi - \lambda^2\phi = Q\,\delta^{(3)}(\vec{r})$

når konstanten k velges riktig.

For $r>0$ har vi:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\left(\lambda + \frac{1}{r}\right)\phi$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{1}{r^2}\phi + \left(\lambda+\frac{1}{r}\right)^2\phi = \left(\lambda^2 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2}{r^2}\right)\phi$$

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dr}\,\nabla r$$

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dr^2}(\nabla r)^2 + \frac{d\phi}{dr}\,\nabla^2 r$$

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}\,,\quad (\nabla r)^2 = 1\,,\quad \nabla^2 r = \frac{\nabla\cdot\vec{r}}{r} - \frac{1}{r^2}\,\vec{r}\cdot(\nabla r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = \left(\lambda^2 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r}\left(\lambda+\frac{1}{r}\right)\right)\phi = \lambda^2\phi$$

$\nabla^2\phi - \lambda^2\phi = 0$, som er ligning (*) for $r>0$.

Det gjenstår å verifisere (*) i origo.

Integrer ligning (*) over en kule med radius R, volum V, og sentrum i origo:

$$\int_V dV\,\nabla^2\phi - \lambda^2\int_V dV\,\phi = Q$$

Det andre integralet går mot 0 når $R\to 0$.

Det første integralet omformes til et integral over overflaten S:

$$\int_V dV\,\nabla^2\phi = \int_S d\vec{S}\cdot\nabla\phi = 4\pi R^2 \left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=R} = -4\pi R^2\left(\lambda + \frac{1}{R}\right) k\,\frac{e^{-\lambda R}}{R}$$

$$\xrightarrow[R\to 0]{} -4\pi k$$

Det viser at Yukawapotensialet løser feltligningen dersom $\underline{\underline{k = -\frac{Q}{4\pi}}}$

3 e) Regn om $\lambda = (1\,\text{meter})^{-1}$ til kg ved å bruke at

$$\hbar = 1{,}1\times10^{-34}\,\text{J s} = 1{,}1\times10^{-34}\,\text{kg m}^2/\text{s} = 1$$

$$c = 3{,}0\times10^{8}\,\text{m/s} = 1$$

Vi får at

$$\lambda = \lambda\cdot\frac{\hbar}{c} = \frac{1}{1\,\text{m}}\cdot\frac{1{,}1\times10^{-34}\,\text{kg m}^2/\text{s}}{3{,}0\times10^{8}\,\text{m/s}} = \underline{\underline{3{,}7\times10^{-43}\,\text{kg}}}$$

f) Sammenlign vekselvirkningsleddet i Lagrangefunksjonen i oppgave 2:

$$L_{vv}^{\text{oppg. 2}} = -q\phi\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

med vekselvirkningsleddet i Lagrangefunksjonen i oppgave 3:

$$L_{vv}^{\text{oppg. 3}} = \int d^3\vec{r}\left(-Q\sqrt{1-\frac{\vec{V}^2}{c^2}}\;\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}(t))\;\phi(\vec{r},t)\right)$$

$$= -Q\sqrt{1-\frac{\vec{V}^2}{c^2}}\;\phi(\vec{R}(t),t)$$

Vi ser at Yukawapotensialet

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi}\,\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

fra ladningen Q kan identifiseres med potensialet ϕ i oppgave 2.

Vi fant i oppgave 2b) den ikke-relativistiske grensen

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi \quad , \quad \text{dvs.} \quad H = \frac{p^2}{2m} + q\phi$$

Vi ser at kraften er $\begin{cases}\text{tiltrekkende når } qQ>0, \\ \text{frastøtende når } qQ<0,\end{cases}$

motsatt av elektromagnetiske krefter.

(Samme konklusjon kan vi få ved å bruke bevegelsesligningene fra 2c))