NTNU
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Finn Bakke
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74350 Klassisk feltteori
Mandag 15.januar 1996
kl.0900–1400

Tillatte hjelpemidler:
(Alternativ B): Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae.

Oppgave 1

Lagrangetettheten for et fritt reelt Klein–Gordon felt er

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}} - \kappa^2\phi^2 \right)$$

a) Finn feltlikningene for dette feltet.

b) Vis at energi–impulstensoren

$$\mathscr{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial^{\nu}\phi - g^{\mu\nu}\mathscr{L}$$

tilfredstiller bevarelsesloven

$$\frac{\partial \mathscr{T}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

c) Regn ut komponentene $\mathscr{T}^{00}$ og $\mathscr{T}^{k0}$,
angi disse komponentenes fysiske betydning og skriv opp den bevarelsesloven de tilfredstiller.

Oppgave 2

a) Bevegelsen av en liten massepartikkel i et gravitasjonsfelt hvor intervallet er gitt ved $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, er bestemt av variasjonsprinsippet

$$\int_1^2 ds = \text{ekstremal verdi langs partikkelbanen.}$$

Vis at dette gir bevegelseslikningene

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

hvor

$$\Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}\right) \text{ er Christoffel–symbolet}$$

τ er egentiden for partikkelen,
$g_{\mu\nu}(x)$ er metrikken som beskriver gravitasjonsfeltet.

b) Anta at komponentene A^μ til en vektor som parallellforskyves fra et sted x^β til et nærliggende sted $x^\beta + \delta x^\beta$ forandres proporsjonalt med vektorkomponentenes størrelser og med forskyvningen

$$\delta A^\mu = -K^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta .$$

Faktorene $K^\mu_{\alpha\beta}(x)$ kalles konneksjonskoeffisientene. Vis hvordan en finner bevegelseslikninger for en massepartikkel som beveger seg i dette rommet, ved å parallellforskyve partikkelens hastighetsvektor

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

i sin egen retning.
Hvordan kan $K^\mu_{\alpha\beta}$ uttrykkes ved metrikken $g_{\mu\nu}(x)$?

c) Vi transformerer til et nytt koordinatsystem gitt ved

$$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} - x^{\mu}(P) + \tfrac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(P)[x^{\alpha} - x^{\alpha}(P)][x^{\beta} - x^{\beta}(P)]$$

Her er $x^{\mu}(P)$ og $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(P)$ de gamle koordinatenes og Christoffelsymbolets verdier i punktet P.

Regn ut verdien for den nye $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}(P)$ i punktet P og finn hvordan bevegelses–likningen fra a) vil se ut i dette punktet P med disse nye koordinatene?

Sammenhengen mellom Christoffel–symbolets verdier i to koordinatsystemer $\tilde{x}^{\mu}$ og x^{μ} er gitt ved

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\beta}}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} - \frac{\partial x^{\tau}}{\partial\tilde{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\tilde{x}^{\beta}}\frac{\partial^{2}\tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\tau}} .$$

d) Redegjør for hvordan denne nye lokale formen for bevegelseslikningene i punktet P kan brukes til å uttrykke Einsteins ekvivalensprinsipp.

Oppgave 3

I gravitasjonsfeltet rundt en masse M i ro i origo er metrikken, når en bruker et passende polarkoordinatsystem
$x^{\mu} = (ct,r,d,\phi)$, gitt ved

$$ds^{2} = \left(1-\frac{\epsilon}{r}\right)c^{2}dt^{2} - \left(1-\frac{\epsilon}{r}\right)^{-1} dr^{2} - r^{2}(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta\, d\phi^{2}) , \quad \epsilon = \frac{2GM}{c^{2}}$$

a) Finn bevegelseslikningene $\frac{d\phi}{d\sigma} = f(r)$, $\frac{dt}{d\sigma} = g(r)$ og $\frac{dr}{d\sigma} = h(r)$

for lysstråler som beveger seg i planet $\theta = \frac{\pi}{2}$

(σ er en baneparameter).

b) Vis at en lysstråle vil bevege seg i et plan som med passende valg av polar–aksen vil være planet $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) Vis at lysets mulige baner $r = r(\phi)$ må oppfylle likningen

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \epsilon r - r^2 + \frac{r^4}{b^2}.$$

d) Hvilken verdi må støtparameteren $b = b(\epsilon)$ ha for at sirkelen med radius $\frac{3}{2}\epsilon$ skal være en mulig lysbane?
Vil denne sirkelbanen være stabil? (Undersøkes enklest ved å benytte den deriverte av likningen ovenfor $\frac{d^2r}{d\phi^2} = \frac{1}{2}\epsilon - r + \frac{2}{b^2}r^3$).