NTNU
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74350 Klassisk feltteori
Onsdag 28.august 1996
kl. 0900–1400

Tillatte hjelpemidler:
(Alternativ B): Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae.

Oppgave 1

Gitt Lagrangetettheten $\mathscr{L}(\phi_n, \partial_\mu \phi_n)$ for et felt med N komponenter $\phi_n(x,t)$ $n = 1,2 \ldots N$

a) Hvordan ser de generelle feltlikningene for dette tilfellet ut?

b) Vis at energi–impulstensoren

$$\mathscr{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \partial^\nu \phi_n - g^{\mu\nu} \mathscr{L}$$

tilfredstiller bevarelseslovene

$$\frac{\partial \mathscr{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

c) Vis at dreieimpulstettheten $\mathscr{M}_i^0 = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} x^j \mathscr{T}^{0k}$ $(i,j,k = 1,2,3)$ tilfredstiller en tilsvarende bevegelseslikning når energi impulstensoren er symmetrisk $\mathscr{T}^{\mu\nu} = \mathscr{T}^{\nu\mu}$. ϵ_{ijk} er det totalt antisymmetriske Levi–Civita symbolet.

Oppgave 2

Et partikkelsystem har Lagrangefunksjonen $L(q,\dot{q},t)$ med virkningsintegralet $S = \int_1^2 L(q,\dot{q},t)\,dt$, q står fpr koordinatene q^i $i = 1,2,3....f.$

a) Finn de generelle bevegelseslikningene for partikkelene.

b) Vis at hvis L ikke avhenger eksplisitt av tiden, vil energien
$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L$ være bevart.

c) Finn energien for et partikkelsystem med

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\,\dot{q}^i\dot{q}^j + b_i\dot{q}^i - V(q)\,.$$

d) En liten massepartikkel i et gravitasjonsfelt, hvor intervallet er gitt ved
$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, beveger seg langs en vei av ekstremal lengde
$\int_1^2 ds$ = ekstremalverdi.

Vis at dette gir bevegelseslikningene

$$\frac{dv^\kappa}{d\tau} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu = 0$$

hvor

$v^\kappa = \frac{dx^\kappa}{d\tau}$ er banehastigheten

τ = egentiden

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right).$$

Oppgave 3

I gravitasjonsfeltet rundt en masse M i ro er intervallet, når en bruker et passende koordinatsystem, $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$ gitt ved

$$ds^2 = \left(\frac{r-A}{r+A}\right)c^2dt^2 - \left(\frac{r+A}{r-A}\right)dr^2 - (r+A)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\ ,\quad A = \text{konst.}$$

a) Finn bevegelseslikningene $\frac{d\phi}{d\sigma} = f(r)$, $\frac{dt}{d\sigma} = g(r)$ og $\frac{dr}{d\sigma} = h(r)$ for lysstråler som beveger seg i planet $\theta = \frac{\pi}{2}$ (σ er en baneparameter).

b) Vis at en lysstråle vil bevege seg i et plan som med passende valg av polar–aksen vil være planet $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) Vis at lysets mulige baner $r = r(\phi)$ i planet $\theta = \frac{\pi}{2}$ må oppfylle likningen

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = A^2 - r^2 + \frac{(r+A)^4}{b^2}$$

d) Hvilken verdi må støtparameteren $b = b(A)$ ha for at sirkelen med $r = 2A$ skal være en mulig lysbane?

e) Vis at den oppgitte metrikken er ekvivalent med Schwarzschildmetrikken bare med en annen r–koordinat. (Med Schwarzschild–metrikken har intervallet formen
$$ds^2 = \left(1-\frac{\epsilon}{\rho}\right)c^2dt^2 - \left(1-\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{-1}d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2)$$
ρ, θ, ϕ er her polarkoordinater og $\epsilon = \frac{2GM}{c^2}$.
Hvordan er sammenhengen mellom A og ϵ og hva betyr koordinaten r ?