NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori
Mandag 15. desember 1997
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Noen nyttige konstanter:

Newtons gravitasjonskonstant:	$G = 6,673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = 1,055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Hubble-parameteren:	$H \approx 1/(10^{10}\text{ år})$

Oppgave 1:

a) Hva er forskjellen på en global og en lokal bevaringslov?
Hvorfor må alle relativistiske bevaringslover være lokale?

b) Schwarzschild-radien til en masse M er

$$R_M = \frac{2GM}{c^2}\ .$$

Hvor stor kan en vanndråpe bli før den blir et svart hull?
Hvis den gjennomsnittlige massetettheten i Universet er lik den kritiske tettheten

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}\ ,$$

og hvis Universet er et svart hull, hvor stor (minst) er da radien til Universet?

c) Schwarzschild-metrikken har følgende form,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{R_M}{r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) \ .$$

Vi bruker koordinater $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$.
Still opp eksplisitt Klein–Gordon-ligningen for skalarfeltet $\phi = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\right) + \kappa^2\,\sqrt{|g|}\,\phi = 0 \ ,$$

i Schwarzschild-metrikken. Her er $g = \det(g_{\mu\nu})$.
Klein–Gordon-feltet ϕ har masse m, og $\kappa = mc/\hbar$.
Fins det separable løsninger, av formen $\phi(t, r, \theta, \varphi) = T(t)\,R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$?
(Det er ikke nødvendig å finne eventuelle løsninger eksplisitt!)

Oppgave 2:

Det elektromagnetiske vektorpotensialet i en tidsdimensjon og to romdimensjoner er et kovariant vektorfelt $A_\mu = A_\mu(x) = A_\mu(x^0, x^1, x^2)$, der $\mu = 0, 1, 2$.
Koordinatene $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2)$ er vilkårlig valgt (inntil videre).
Den elektromagnetiske felttensoren defineres som $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$.
Den elektriske ladningstettheten og strømtettheten beskrives av et kontravariant vektorfelt $j^\mu = j^\mu(x)$.
Den metriske tensoren er $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$, og vi definerer $g = \det(g_{\mu\nu})$ (vi antar at $g > 0$).
Levi–Civita-symbolet $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ er fullstendig antisymmetrisk, og $\epsilon^{012} = 1$.

a) Vis at $F_{\mu\nu}$ er et tensorfelt, og at $\epsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu,\alpha} = 0$.

b) Vis at Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{a}{4}\,\sqrt{g}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{b}{4}\,\epsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda F_{\mu\nu} - \sqrt{g}\,A_\mu j^\mu \ ,$$

der a og b er konstanter, og der $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}$, gir følgende feltligninger:

$$-a\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}\,\left(\sqrt{g}\,F^{\alpha\beta}\right) + \frac{b}{2}\,\epsilon^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,j^\alpha \ .$$

c) Er den elektriske ladningen bevart i følge denne teorien?

d) Er teorien invariant under en gauge-transformasjon $A_\mu \mapsto \widetilde{A}_\mu = A_\mu + \chi_{,\mu}$, der χ er et vilkårlig skalarfelt?

e) Er teorien invariant under en generell koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu$?

f) Anta at $(x^0, x^1, x^2) = (ct, x, y)$, og at

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Anta videre at

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c \\ -E_x/c & 0 & -B \\ -E_y/c & B & 0 \end{pmatrix} ,$$

og at $j^\mu = (j^0, j^1, j^2) = (c\rho, j_x, j_y)$.
Vis at da kan feltligningene skrives på formen

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \, , \\ \frac{a}{c^2} \nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{b}{c} B &= \rho \, , \\ -\frac{a}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + a \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{b}{c} E_y &= j_x \, , \\ -\frac{a}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - a \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{b}{c} E_x &= j_y \, . \end{aligned}$$

g) Anta at strømtettheten er identisk null, dvs. at $j_x = j_y = 0$, og at ladningstettheten ρ er konstant lik ρ_0 for $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$, mens $\rho = 0$ for $r > R$.
Løs ligningene ovenfor i de to spesialtilfellene $a \neq 0$, $b = 0$ og $a = 0$, $b \neq 0$.
Hva kan du si om det generelle tilfellet $a \neq 0$, $b \neq 0$?