NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori
Onsdag 20. august 1997
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

a) Hvordan transformeres et skalarfelt $f = f(x)$ under en vilkårlig koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$?
Hvordan transformeres et kontravariant vektorfelt $A^\mu = A^\mu(x)$?
Et kovariant vektorfelt $B_\mu = B_\mu(x)$?
Et kovariant tensorfelt av rang to, $C_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}(x)$?
Her er $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ og $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

b) Anta at koordinattransformasjonen $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$ er infinitesimal, dvs. at $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$ der Δx^μ er infinitesimal. Vis at da transformeres skalarfeltet f over i $\tilde{f} = f + \Delta f$, med

$$\Delta f = -f_{,\mu}\, \Delta x^\mu \ .$$

Vis at tensorfeltet $C_{\mu\nu}$ transformeres over i $\tilde{C}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + \Delta C_{\mu\nu}$, med

$$\Delta C_{\mu\nu} = -C_{\rho\nu}\, \Delta x^\rho_{,\mu} - C_{\mu\rho}\, \Delta x^\rho_{,\nu} - C_{\mu\nu,\rho}\, \Delta x^\rho \ .$$

Den metriske tensoren i den spesielle relativitetsteorien er

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Et svakt gravitasjonsfelt kan beskrives av en metrisk tensor av formen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ ,$$

der $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} = h_{\mu\nu}(x)$ er en liten perturbasjon.
Lagrange-tettheten for feltet $h_{\mu\nu}$ er

$$\mathcal{L} = \frac{C}{2}\,\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left(h_{\kappa\mu,\rho}\,h_{\lambda\nu,\sigma} - 2\,h_{\kappa\mu,\rho}\,h_{\lambda\sigma,\nu} - h_{\kappa\lambda,\rho}\,h_{\mu\nu,\sigma} + 2\,h_{\kappa\lambda,\rho}\,h_{\mu\sigma,\nu}\right) ,$$

der C er en konstant.

c) Vis at Euler–Lagrange-ligningene som følger fra Lagrange-tettheten $\mathcal{L}$ kan skrives på følgende form:

$$\eta^{\kappa\lambda}\left(h_{\alpha\beta,\kappa\lambda} + h_{\kappa\lambda,\alpha\beta} - h_{\alpha\kappa,\beta\lambda} - h_{\beta\kappa,\alpha\lambda}\right) + \eta_{\alpha\beta}\,\eta^{\kappa\lambda}\,\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\mu,\lambda\nu} - h_{\kappa\lambda,\mu\nu}\right) = 0 \,.$$

Hvor mange uavhengige ligninger er det?
Vis at dette ligningssettet er ekvivalent med ligningssettet

$$\eta^{\kappa\lambda}\left(h_{\alpha\beta,\kappa\lambda} + h_{\kappa\lambda,\alpha\beta} - h_{\alpha\kappa,\beta\lambda} - h_{\beta\kappa,\alpha\lambda}\right) = 0 \,. \tag{1}$$

d) Vis at en liten koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$, som ovenfor, gir følgende transformasjon av et svakt gravitasjonsfelt:

$$h_{\mu\nu} \mapsto \widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \Delta x_{\mu,\nu} - \Delta x_{\nu,\mu} \,, \tag{2}$$

der $\Delta x_\mu = \eta_{\mu\nu}\,\Delta x^\nu$.
Er feltligningene ovenfor invariante under en slik transformasjon?

e) Anta en planbølgeløsning av ligning (1), av formen

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}\,f(k_\rho x^\rho) \,, \tag{3}$$

der $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ er en konstant "polarisasjonstensor", k_ρ er en konstant bølgetallsvektor, og f er en funksjon av en variabel. Anta at f'', den dobbeltderiverte av f, ikke er identisk lik null.
Hvilke betingelser legger feltligningene på $e_{\mu\nu}$, k_ρ og f?

f) I planbølgeløsningen gitt i ligning (3) er det mulig å transformere polarisasjonstensoren $e_{\mu\nu}$ ved hjelp av koordinattransformasjoner som i ligning (2).
Vis at det følger av feltligningene at:
1) Hvis $k_\mu k^\mu \neq 0$, fins det en koordinattransformasjon som gjør $e_{\mu\nu} = 0$.
2) Hvis $k_\mu k^\mu = 0$, og mer spesielt hvis $k_\mu = (1, 0, 0, -1)$, fins det en koordinattransformasjon som gjør

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

der a og b er konstanter.
Hva viser dette om egenskapene til gravitasjonsbølger?

Oppgave 2:

Gitt et gravitasjonsfelt, beskrevet av den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$, og gitt et elektromagnetisk felt, beskrevet av firevektorpotensialet A_μ.
La $x^\mu = x^\mu(\tau)$ være tid- og romkoordinatene til en punktpartikkel, som funksjon av en parameter τ (egentiden). Den firedimensjonale hastigheten til partikkelen er $\dot{x}^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$.
Lagrange-funksjonen er

$$L = -\frac{1}{2}\, m g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu\, \dot{x}^\nu - qA_\mu\, \dot{x}^\mu\ .$$

m er hvilemassen til partikkelen og q den elektriske ladningen.

a) Utled Euler–Lagrange-ligningene som følger av Lagrange-funksjonen L.

b) Anta at $A_\mu = 0$, og at $g_{\mu\nu}$ beskriver en plan gravitasjonsbølge.
Mer presist, la $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, der $h_{\mu\nu}$ er en liten perturbasjon som gitt i ligning (3).
Anta at bølgetallsvektoren $k_\rho = (1, 0, 0, -1)$ og at polarisasjonstensoren $e_{\mu\nu}$ har formen

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(Vi setter altså $b = 0$ i ligning (4)).
Anta at funksjonen f i ligning (3) er lik null utenfor et endelig intervall, det vil si at bølgen passerer et vilkårlig punkt i rommet innenfor et endelig tidsintervall.
Anta også at partikkelen hele tiden beveger seg med en hastighet som er mye mindre enn lyshastigheten c.
Vis at da fins det en (tilnærmet) løsning av bevegelsesligningene av formen

$$x^0 = c\tau\ , \qquad x^3 = 0\ , \qquad \dot{x}^1 = u^1\, \mathrm{e}^{af(c\tau)}\ , \qquad \dot{x}^2 = u^2\, \mathrm{e}^{-af(c\tau)}\ ,$$

der u^1 og u^2 er vilkårlige konstanter.
Hvilken innvirkning har gravitasjonsbølgen på bevegelsen til partikkelen ("før" sammenlignet med "etter")?
Kan en eventuell forandring i bevegelsen observeres?