Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 20. august 1997
Løsninger

1a) Et skalarfelt transformeres slik under en koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu$:

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = f(x) \ .$$

Et kontravariant vektorfelt A^μ transformeres slik:

$$\widetilde{A}^\mu(\widetilde{x}) = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa}\, A^\kappa(x) \ .$$

Et kovariant vektorfelt B_μ transformeres slik:

$$\widetilde{C}_{\mu\nu}(\widetilde{x}) = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\, B_\kappa(x) \ .$$

Et kovariant tensorfelt $C_{\mu\nu}$ transformeres slik:

$$\widetilde{C}_{\mu\nu}(\widetilde{x}) = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\nu}\, C_{\kappa\lambda}(x) \ .$$

1b) Dersom $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$, der Δx^μ er infinitesimal, så er

$$\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\nu} \ ,$$

og

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\nu} \ .$$

Det siste følger av det første, idet koordinattransformasjonene $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu$ og $\widetilde{x}^\mu \mapsto x^\mu$ er inverse av hverandre, og derfor også matrisene $\partial x^\mu/\partial \widetilde{x}^\nu$ og $\partial \widetilde{x}^\mu/\partial x^\nu$ er inverse av hverandre. Vi neglisjerer hele tiden alle ledd som er av andre eller høyere orden i Δx. For skalarfeltet $f = f(x)$ gjelder at $\widetilde{f}(x + \Delta x) = f(x)$, og siden Δx er infinitesimal, betyr det at

$$\widetilde{f}(x) = f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x^\mu\, \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \ .$$

For tensorfeltet $C_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}(x)$ har vi at

$$\widetilde{C}_{\mu\nu}(x + \Delta x) = \left(\delta^\kappa_\mu - \frac{\partial \Delta x^\kappa}{\partial x^\mu}\right)\left(\delta^\lambda_\nu - \frac{\partial \Delta x^\lambda}{\partial x^\nu}\right) C_{\kappa\lambda}(x) \ .$$

Ved en enkel omforming får vi det som skulle vises, til første orden i Δx.

1c) Euler–Lagrange-ligningene får vi kanskje enklest ved å beregne de deriverte $\partial\mathcal{L}/\partial h_{\alpha\beta,\gamma}$ som om symmetrien $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ ikke eksisterte, og så symmetriserer vi etterpå. Det gir ligningene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h_{\alpha\beta,\gamma}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h_{\beta\alpha,\gamma}}\right) = 0 \ ,$$

der

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h_{\alpha\beta,\gamma}}\right) = \frac{C}{2}\Big(\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\lambda\nu,\sigma\gamma} + \eta^{\kappa\alpha}\eta^{\mu\beta}\eta^{\rho\gamma}h_{\kappa\mu,\rho\gamma}$$
$$-2\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\lambda\sigma,\nu\gamma} - 2\eta^{\kappa\alpha}\eta^{\mu\gamma}\eta^{\rho\beta}h_{\kappa\mu,\rho\gamma}$$
$$-\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\mu\nu,\sigma\gamma} - \eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\gamma}h_{\kappa\lambda,\rho\gamma}$$
$$+2\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\mu\sigma,\nu\gamma} + 2\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\rho\beta}h_{\kappa\lambda,\rho\gamma}\Big)$$
$$= C\Big(\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\lambda\nu,\sigma\gamma} - 2\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\lambda\sigma,\nu\gamma} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\mu\nu,\sigma\gamma}$$
$$+\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}h_{\mu\sigma,\nu\gamma} + \eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\rho\beta}h_{\kappa\lambda,\rho\gamma}\Big)$$
$$= \quad C\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\lambda,\mu\nu} - 2h_{\kappa\mu,\lambda\nu} + h_{\mu\nu,\kappa\lambda}\right)$$
$$+C\eta^{\alpha\beta}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\mu,\lambda\nu} - h_{\kappa\lambda,\mu\nu}\right) \ .$$

Symmetrisering (og divisjon med 2C) gir følgende Euler–Lagrange-ligninger:

$$\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\lambda,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\kappa\lambda} - h_{\kappa\mu,\lambda\nu} - h_{\lambda\mu,\kappa\nu}\right) + \eta^{\alpha\beta}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\mu,\lambda\nu} - h_{\kappa\lambda,\mu\nu}\right) = 0 \ .$$

Vi kan nå bruke den uperturberte metriske tensoren $\eta_{\mu\nu}$ til å flytte indeksene α og β ned. Dvs., vi multipliserer med $\eta_{\gamma\alpha}\eta_{\delta\beta}$. Det gir ligningene

$$\eta^{\mu\nu}\left(h_{\gamma\delta,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\gamma\delta} - h_{\gamma\mu,\delta\nu} - h_{\delta\mu,\gamma\nu}\right) + \eta_{\gamma\delta}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\mu,\lambda\nu} - h_{\kappa\lambda,\mu\nu}\right) = 0 \ , \qquad (1)$$

som skulle vises.

Det er 10 uavhengige ligninger, like mange som det er uavhengige komponenter av $h_{\mu\nu}$. For å vise at ligning (1) impliserer ligningene

$$\eta^{\mu\nu}\left(h_{\gamma\delta,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\gamma\delta} - h_{\gamma\mu,\delta\nu} - h_{\delta\mu,\gamma\nu}\right) = 0 \ , \qquad (2)$$

kontraherer vi indeksene γ og δ, dvs. at vi multipliserer ligning (1) med $\eta^{\gamma\delta}$. Vi bruker at $\eta^{\gamma\delta}\eta_{\gamma\delta} = 4$, og vi får da at

$$\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\kappa\mu,\lambda\nu} - h_{\kappa\lambda,\mu\nu}\right) = 0 \ , \qquad (3)$$

som vi kan sette tilbake inn i ligning (1). Dermed har vi vist implikasjonen den ene veien, fra ligning (1) til ligning (2).

For å vise implikasjonen den andre veien, fra (2) til (1), må vi bare vise at ligning (2) impliserer ligning (3). Det gjør vi på nøyaktig samme måte, dvs. at vi multipliserer ligningen (altså ligning (2)) med $\eta^{\gamma\delta}$.

1d) Vi bruker punkt 1b). Siden $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ er en tensor, har vi at

$$\Delta g_{\mu\nu} = -g_{\rho\nu}\Delta x^\rho_{,\mu} - g_{\mu\rho}\Delta x^\rho_{,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}\Delta x^\rho \ .$$

Her er $\Delta g_{\mu\nu} = \Delta h_{\mu\nu}$, og $g_{\mu\nu,\rho} = h_{\mu\nu,\rho}$. Videre er

$$g_{\rho\nu}\Delta x^\rho_{,\mu} = \eta_{\rho\nu}\Delta x^\rho_{,\mu} = \Delta x_{\nu,\mu} \ .$$

Vi neglisjerer ledd av typen $h_{\rho\nu}\Delta x^\rho_{,\mu}$, som er "dobbelt små", idet både h og Δx er små. Det gir at

$$\Delta h_{\mu\nu} = -\Delta x_{\nu,\mu} - \Delta x_{\mu,\nu} \ ,$$

som skulle vises.

Ved innsetting ser vi at $\widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \Delta h_{\mu\nu}$ er en løsning av ligning (2) hvis og bare hvis $h_{\mu\nu}$ er en løsning. Det vil si at ligning (2) er invariant.

1e) Når $h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, så er

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta,\kappa} &= e_{\alpha\beta} k_\kappa f'(k_\rho x^\rho) \ , \\ h_{\alpha\beta,\kappa\lambda} &= e_{\alpha\beta} k_\kappa k_\lambda f''(k_\rho x^\rho) \ . \end{aligned}$$

Dersom f'' ikke er identisk lik null, så er feltligningene (2) ekvivalente med at

$$\eta^{\kappa\lambda}(e_{\alpha\beta} k_\kappa k_\lambda + e_{\kappa\lambda} k_\alpha k_\beta - e_{\alpha\kappa} k_\beta k_\lambda - e_{\beta\kappa} k_\alpha k_\lambda) = 0 \ .$$

Eller, med en liten omskriving:

$$e_{\alpha\beta}(k_\kappa k^\kappa) + (\eta^{\kappa\lambda} e_{\kappa\lambda}) k_\alpha k_\beta - (e_{\alpha\kappa} k^\kappa) k_\beta - (e_{\beta\kappa} k^\kappa) k_\alpha = 0 \ . \qquad (4)$$

Feltligningene legger ingen begrensning på funksjonen f.

1f) Anta at $\Delta x^\mu = a^\mu F(k_\rho x^\rho)$, med a^μ konstant. Da gir ligning (2) i oppgaveteksten at

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - a_\mu k_\nu F'(k_\rho x^\rho) - a_\nu k_\mu F'(k_\rho x^\rho) \ .$$

Her er $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$. Hvis $F' = f$, og hvis $h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, samt $\widetilde{h}_{\mu\nu} = \widetilde{e}_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, så får vi at

$$\widetilde{e}_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} - a_\mu k_\nu - a_\nu k_\mu \ .$$

1) Hvis $k_\mu k^\mu \neq 0$, så sier ligning (4) ovenfor at

$$e_{\alpha\beta} = -A k_\alpha k_\beta + B_\alpha k_\beta + B_\beta k_\alpha \ .$$

Der

$$A = \frac{\eta^{\kappa\lambda} e_{\kappa\lambda}}{k_\mu k^\mu} \ , \qquad B_\alpha = \frac{e_{\alpha\kappa} k^\kappa}{k_\mu k^\mu} \ .$$

Da kan vi oppnå at $\widetilde{e}_{\mu\nu} = 0$ ved at vi velger

$$a_\mu = -\frac{A}{2} k_\mu + B_\mu \ .$$

2) Hvis $k_\mu = (1, 0, 0, -1)$, så er $k_\mu k^\mu = 0$, og ligning (4) ovenfor sier at

$$A k_\alpha k_\beta - B_\alpha k_\beta - B_\beta k_\alpha = 0 \ ,$$

hvis vi definerer

$$A = \eta^{\kappa\lambda} e_{\kappa\lambda} = e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33} \ , \qquad B_\alpha = e_{\alpha\kappa} k^\kappa = e_{\alpha 0} + e_{\alpha 3} \ .$$

Følgende tilfeller er ikke-trivielle:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta = 0, 0 &: & A - 2B_0 &= 0 \ , \\ \alpha, \beta = 0, 1 &: & B_1 &= 0 \ , \\ \alpha, \beta = 0, 2 &: & B_2 &= 0 \ , \\ \alpha, \beta = 0, 3 &: & -A + B_0 - B_3 &= 0 \ , \\ \alpha, \beta = 1, 3 &: & B_1 &= 0 \ , \\ \alpha, \beta = 2, 3 &: & B_2 &= 0 \ , \\ \alpha, \beta = 3, 3 &: & A + 2B_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Av dem får vi fire uavhengige ligninger:

$$\begin{aligned} B_1 &= & e_{10} + e_{13} &= 0\,, \\ B_2 &= & e_{20} + e_{23} &= 0\,, \\ A - 2B_0 &= & -e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33} - 2e_{03} &= 0\,, \\ A + 2B_3 &= & e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33} + 2e_{30} &= 0\,. \end{aligned}$$

Siden $e_{03} = e_{30}$, gir det at

$$e_{11} + e_{22} = 0\,.$$

Gauge-transformasjonen

$$\widetilde{e}_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + a_\mu k_\nu + a_\nu k_\mu = \begin{pmatrix} e_{00} + 2a_0 & e_{01} + a_1 & e_{02} + a_2 & e_{03} + a_3 - a_0 \\ e_{10} + a_1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} - a_1 \\ e_{20} + a_2 & e_{21} & e_{22} & e_{23} - a_2 \\ e_{30} + a_3 - a_0 & e_{31} - a_1 & e_{32} - a_2 & e_{33} - 2a_3 \end{pmatrix},$$

med

$$a_0 = -\frac{e_{00}}{2}\,, \quad a_1 = -e_{01} = e_{13}\,, \quad a_2 = -e_{02} = e_{23}\,, \quad a_3 = \frac{e_{33}}{2}\,,$$

gir da at $\widetilde{e}_{\mu\nu}$ får den formen som er oppgitt i ligning (4) i oppgaveteksten.
Hva viser så dette om gravitasjonsbølger?
En ikke-triviell gravitasjonsbølge er en som ikke kan transformeres bort fullstendig ved hjelp av en koordinattransformasjon.
En ikke-triviell plan gravitasjonsbølge forplanter seg med lyshastigheten, fordi den må ha en bølgetallsvektor k_μ med $k_\mu k^\mu = 0$. Gravitonet må altså være en partikkel som har masse $m = 0$.
I likhet med en plan lysbølge er gravitasjonsbølgen polarisert transversalt på forplantningsretningen, og har to ikke-trivielle polarisasjonsfrihetsgrader.
Men polarisasjonen til gravitasjonsbølgen beskrives av en symmetrisk tensor av rang to, istedenfor av en polarisasjonsvektor som for lysbølgen.
(Fotonet har spinn 1, mens gravitonet har spinn 2. En partikkel med masse $m > 0$ og spinn $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ har $2s + 1$ spinnfrihetsgrader, mens en partikkel med masse $m = 0$ og spinn s har maksimalt to spinnfrihetsgrader, idet den har spinnkomponent $\pm s$ langs en akse som er parallell med impulsen.)

2a) Euler–Lagrangeligningen:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0\,,$$

blir som følger:

$$-\frac{1}{2}\, m g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - q A_{\mu,\alpha} \dot{x}^\mu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,(m g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu + q A_\alpha) = 0\,.$$

Eller, litt mer utførlig skrevet ut:

$$m\left(-\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\alpha\nu,\mu}\right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + q(-A_{\mu,\alpha} + A_{\alpha,\mu}) \dot{x}^\mu + m g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0\,.$$

2b) Med $A_\mu = 0$, samt $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ og $h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, får Euler–Lagrange-ligningen følgende form:

$$\left(-\frac{1}{2}\, e_{\mu\nu} k_\alpha + e_{\alpha\nu} k_\mu\right) f'(k_\rho x^\rho)\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \eta_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \,,$$

når vi dessuten neglisjerer leddet $h_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu$.
Vi antar at $k_\rho = (1, 0, 0, -1)$, og at alle komponentene $e_{\mu\nu}$ er null med unntak av $e_{11} = -e_{22} = a$.
Vi får fire ligninger, for $\alpha = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,(e_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)\, f'(k_\rho x^\rho) + \ddot{x}^0 &= 0 \,, \\
(e_{1\nu}\dot{x}^\nu)\,(k_\mu \dot{x}^\mu)\, f'(k_\rho x^\rho) - \ddot{x}^1 &= 0 \,, \\
(e_{2\nu}\dot{x}^\nu)(k_\mu \dot{x}^\mu)\, f'(k_\rho x^\rho) - \ddot{x}^2 &= 0 \,, \\
\frac{1}{2}\,(e_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)\, f'(k_\rho x^\rho) - \ddot{x}^3 &= 0 \,.
\end{aligned}$$

Her er $k_\rho x^\rho = x^0 - x^3$. Av bevegelsesligningene følger at $\ddot{x}^0 - \ddot{x}^3 = 0$.
Før bølgen kommer, og etter at den har passert, er $\dot{x}^0 - \dot{x}^3 = c =$ lyshastigheten.
Følgelig er $\dot{x}^0 - \dot{x}^3 = c$ til enhver tid, og

$$k_\rho x^\rho = x^0 - x^3 = c(\tau - \tau_0)$$

for en konstant τ_0. Vi antar her at $\tau_0 = 0$. Siden uttrykket

$$e_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = a\left((\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2\right)$$

er kvadratisk i de små hastighetskomponentene $\dot{x}^1$ og $\dot{x}^2$, antar vi at det kan neglisjeres, slik at vi får at

$$\ddot{x}^0 = \ddot{x}^3 = 0 \,.$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}
e_{1\nu}\dot{x}^\nu &= a\dot{x}^1 \,, \\
e_{2\nu}\dot{x}^\nu &= -a\dot{x}^2 \,.
\end{aligned}$$

Siden $k_\rho \dot{x}^\rho = \dot{x}^0 - \dot{x}^3 = c$, har vi da følgende bevegelsesligninger for x^1 og x^2:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^1 &= ca\dot{x}^1\, f'(c(\tau - \tau_0)) \,, \\
\ddot{x}^2 &= -ca\dot{x}^2\, f'(c(\tau - \tau_0)) \,.
\end{aligned}$$

Ved innsetting kan vi kontrollere den oppgitte løsningen.
Hastigheten til partikkelen er den samme før og etter at bølgen passerer, fordi $f = 0$ før og etter. Men det er fullt mulig at banen til partikkelen forskyves sidelengs i forhold til hva den ville ha vært uten noen gravitasjonsbølge. Integrasjon av hastighetskomponenten $\dot{x}^1$ gir f.eks., for en vilkårlig valgt τ_0 før bølgen ankommer:

$$x^1(\tau) - \left(x^\mu(\tau_0) + u^1(\tau - \tau_0)\right) = u^1 \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{d}\sigma\, \left(\mathrm{e}^{af(c\sigma)} - 1\right) .$$

Og dette integralet kan godt være forskjellig fra null i grensen når $\tau_0 \to -\infty$ og $\tau \to \infty$.
Siden en eventuell sideforskyvning er forskjellig for partikler som beveger seg med forskjellig hastighet, burde effekten være observerbar.