NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori
Tirsdag 8. desember 1998
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Noen nyttige konstanter:	
Newtons gravitasjonskonstant:	$G = 6,673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = 1,055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Jupiters masse:	$m_J = 1,90 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$
Jupiters radius:	$r_J = 7,19 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$

Oppgave 1:

Prinsippet om generell kovarians seier at ei likning er gyldig i eit gravitasjonsfelt dersom to vilkår er oppfylt:

1. At likninga er gyldig i gravitasjonsfritt rom.
2. At likninga er generelt kovariant.

Gravitasjonsfritt rom er karakterisert ved at den spesielle relativitetsteorien gjeld, med den metriske tensoren gjeve som

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

og konneksjonskoeffisientane som $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$. At likninga er generelt kovariant tyder at likninga vil bevare forma ved ein koordinattransformasjon.

Vi skal no bruke prinsippet om generell kovarians til å vise at geodeselikninga i eit vilkårleg gravitasjonsfelt er gjeve ved:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \,, \tag{1}$$

der $c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$.
Vi viser fyrst lett at likninga er gyldig i gravitasjonsfritt rom, ved å bruke at $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ og $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$. Det gjev

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \,,$$

med $c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$. Dette er nettopp likningane for ein frittfallande partikkel i den spesielle relativitetsteorien, som vi skulle vise.

a) Det står no att å vise at likning (1) er generelt kovariant. Gjer det ved å bruke at ei transformering av konneksjonskoeffisientane kan skrivast:

$$\widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta} \,.$$

b) Vi let ein partikkel følgje ei bane radielt inn mot jorda, ved å la $\theta =$ konstant og $\phi =$ konstant.
Vi nyttar Schwarzschild-metrikken, der M er jordmassen, og $R = 2GM/c^2 = 8{,}87\,\mathrm{mm}$:

$$c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{R}{r}} - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \,.$$

Eksisterer slike radielle banar i Schwarzschild-metrikken?
Bruk geodeselikninga til å vise at rørslelikningane for dei gjenverande komponentane r og t vert:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{R}{2r(r-R)} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{R(r-R)}{2r^3} c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0 \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{R}{r(r-R)} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = 0 \,.$$

Kor stor er tyngdeakselerasjonen i Nidarøhallen ($r = 6360\,\mathrm{km}$)?

Dei konneksjonskoeffisientane du får bruk for som ikkje vert null, er Γ^r_{rr}, Γ^r_{tt} og $\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt}$.
Dei kan finnast ved hjelp av formelen:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) .$$

Oppgave 2:

Et svakt gravitasjonsfelt fra en statisk massefordeling er gitt av metrikken

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}\,, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 + \frac{2\phi}{c^2}\,, \qquad \text{alle andre } g_{\mu\nu} = 0\,,$$

der ϕ er Newtons gravitasjonspotensial, $\phi << c^2$.
Til orden ϕ/c^2 har bevegelsesligningen (geodeseligningen) for en lysstråle i dette gravitasjonsfeltet følgende form:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{2}{c^2}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\,,$$

for tidskoordinaten x^0, og

$$\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{1}{c^2}\,\phi_{,j}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \delta_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\right] + \frac{2}{c^2}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\,,$$

for romkoordinatene $x^j = (x, y, z)$.

a) Anta at $z = 0$. Hvilken betingelse må ϕ oppfylle for at dette skal være mulig?
Hva blir bevegelsesligningene for x og y?
Sammenlign kvantitativt med den bevegelsesligningen Newtons gravitasjonsteori gir (forklaring er ikke nødvendig).

b) Hva er avbøyningsvinkelen α for en lysstråle som passerer planeten Jupiter like over planetoverflaten?
Se bort fra gravitasjonspotensialet fra andre himmellegemer.

Oppgitt integral, for a uavhengig av s:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{(c^2s^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{ca^2}\,.$$

Oppgave 3:

Lagrange-tettheten for et kompleks Klein–Gordon-felt ϕ med elektrisk ladning q er

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\left[g^{\mu\nu}\left(\phi^*_{,\mu} - \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\mu\phi^*\right)\left(\phi_{,\nu} + \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\nu\phi\right) - \kappa^2\phi^*\phi\right],$$

i et ytre gravitasjonsfelt $g_{\mu\nu}$ og et ytre elektromagnetisk felt A_μ.
Vis at en global gauge-transformasjon $\phi \mapsto \widetilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\,\phi$, der β er en vilkårlig reell konstant, er en symmetri.
Bruk Noethers teorem til å utlede en bevaringslov.
Hvilken fysisk størrelse er det som er bevart? Begrunn svaret.
Noethers teorem sier at dersom en infinitesimal transformasjon $\phi^j \mapsto \widetilde{\phi}^j = \phi^j + \Delta\phi^j$ gir at

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}(\Delta\mathcal{M}^\mu)}{\mathrm{d}x^\mu}\,,$$

så er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^j_{,\mu}}\,\Delta\phi^j - \Delta\mathcal{M}^\mu\right) = 0\,.$$

Oppgave 4:

Den potensielle energien W til en såpeboble er gitt av volumet V og overflatearealet A, i følge formelen

$$W = -\lambda \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \sigma A\,.$$

Her er λ, σ og V_0 positive konstanter. Boblen har masse m, og vi vil anta her at massen av luften (inne i boblen) er så liten at den kan neglisjeres.

a) Anta at boblen er kuleformet, med en tidsavhengig radius $R = R(t)$.
Skisser hvordan den potensielle energien W varierer med R.
Definer $\dot{R} = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$. Lagrange-funksjonen er da

$$L = \frac{1}{2} m\dot{R}^2 - W\,.$$

Finn bevegelsesligningen (Euler–Lagrange-ligningen) for $R(t)$.

b) Hvilken konstant verdi må R_0 ha for at $R(t) = R_0$ skal være en løsning av bevegelsesligningen?
Hva kan du si om de løsningene der $R(t)$ ikke er konstant?
Er løsningen $R(t) = R_0$ stabil?

Mer generelt kan boblen deformeres slik at den ikke lenger er kuleformet. Vi antar at overflaten er gitt i polarkoordinater av ligningen $r = r(\theta, \varphi, t)$, der

$$r(\theta,\varphi,t) = R(t)\,\sqrt[3]{1 + \frac{3\rho(\theta,\varphi,t)}{R(t)}} = R(t) + \rho(\theta,\varphi,t) - \frac{(\rho(\theta,\varphi,t))^2}{R(t)} + \cdots\,,$$

og vi antar at

$$\int \mathrm{d}\Omega\,\rho(\theta,\varphi,t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\rho(\theta,\varphi,t) = 0\,. \tag{2}$$

Det gir at volumet av boblen er

$$V(t) = \frac{1}{3}\int \mathrm{d}\Omega\,(r(\theta,\varphi,t))^3 = \frac{4\pi}{3}\,(R(t))^3\,.$$

Her er $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ romvinkelelementet.
Vi antar at avviket fra kuleformen er lite, dvs. at $|\rho| << R$.
Lagrange-funksjonen er da, når vi ser bort fra en uinteressant konstant,

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{m}{2}\dot{R}^2 + 3\lambda\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - 4\pi\sigma R^2 && (3)\\ & + \int \mathrm{d}\Omega \left\{ \frac{m}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - 4\frac{\dot{R}}{R}\rho\frac{\partial\rho}{\partial t} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2}\rho^2\right] + \sigma\left[\rho^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

c) Skriv opp Euler–Lagrange-ligningene som følger av denne Lagrange-funksjonen, både for $R(t)$ og for $\rho(\theta,\varphi,t)$.

d) Hvilke symmetrier (kontinuerlige og/eller diskrete) har såpeboblen?
Og hvilke fysiske størrelser er bevart som følge av disse symmetriene?
Svar gjerne ganske kort.

e) Anta for eksempel at

$$\rho(\theta, \varphi, t) = \psi(t)\,(3\cos^2\theta - 1)\ . \tag{4}$$

Denne deformasjonen (en kvadrupoldeformasjon) er er ett eksempel på hvordan ligning (2) kan oppfylles.
Skisser (med figur!) hvordan boblen da ser ut ved et gitt tidspunkt t.
Sett inn ligning (4) i ligning (3) og vis at det gir Lagrange-funksjonen

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{m}{2}\dot{R}^2 + 3\lambda \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - 4\pi\sigma R^2 \\ & + \frac{2m}{5}\left(\dot{\psi}^2 - 4\,\frac{\dot{R}}{R}\,\psi\,\dot{\psi} + 2\,\frac{\dot{R}^2}{R^2}\,\psi^2\right) - \frac{32\pi\sigma}{5}\,\psi^2 . \end{aligned}$$

f) Skriv opp Euler–Lagrange-ligningene for $R(t)$ og $\psi(t)$ som følger av denne Lagrange-funksjonen.
Hvilken relasjon er det mellom disse bevegelsesligningene og feltligningene du fant under punkt c) ovenfor?
Mer presist spurt: gir disse ligningene en nødvendig og/eller tilstrekkelig betingelse for at ligning (4) skal være en løsning av feltligningene under c)?
Hva sier Euler–Lagrange-ligningene for $R(t)$ og $\psi(t)$ om stabiliteten til likevektsløsningen $R(t) = R_0$?