UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor J.S.Høye
Tlf. 3654

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER

Mandag 29. mai 1989

Tid: 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

a) Dispersjonsrelasjonen for et endimensjonalt gitter med atomer av masse M er gitt ved

$$\omega_k^2 = \frac{1}{M} \sum_j A_{\ell j} \, e^{ik(R_\ell^0 - R_j^0)}$$

med

$$A_{\ell j} = \left. \frac{\partial^2 V(R_\ell - R_j)}{\partial R_\ell \partial R_j} \right|_0 \quad \text{for} \quad \ell \neq j$$

der $V(R_j - R_j)$ er den potensielle energien mellom par av atomer, og ^{0} angir likevektsposisjoner. Hvordan avhenger ω_k av k for små $k \to 0$, og hva er følgelig sammenhengen mellom $A_{\ell\ell}$ og $A_{\ell j}$ $(\ell \neq j)$?

b) Anta i resten av oppgaven at vekselvirkning utover nærmeste naboer kan neglisjeres. Hva blir ω_k når $A_{\ell\ell}$ og gitteravstanden a antas kjent?

c) La vekselvirkningen være gitt ved (for nærmeste naboer)

$$V(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6} \right]$$

Bestem gitteravstanden a og $A_{\ell,\ell-1}$.

Oppgave 2

a) Når γ-kvant sendes ut fra radioaktive kjerner i et gitter forekommer en spesiell effekt, Møssbauer-effekten. Hva er det karakteristiske ved denne effekten?

b) Til å beskrive Møssbauer-effekten mer eksplisitt benyttes i Hamiltonfunksjonen leddet

$$H_{int} \propto a_k^+ \, O(\rho) \, e^{i\vec{k}\delta\vec{R}}$$

for å beskrive vekselvirkningen mellom en atomkjerne og det elektromagnetiske feltet. Her er a_k^+ kreasjonsoperator for fotoner, og $O(\rho)$ en operator som virker på indre kjernekoordinater. Vis ved å danne uttrykket for overgangssannsynligheten

$$w_{fi} \propto |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2$$

hvordan Møssbauer-effekten fremkommer.

c) Ved termisk midling av uttrykket for Møssbauer-effekten fremkommer Debye-Waller faktoren som tilnærmet kan skrives (skal ikke vises)

$$e^{-2W} = e^{-\frac{k^2}{3}\langle\delta R^2\rangle_T}$$

Vi vil bestemme denne faktoren for Einstein-modellen for gittersvingninger ved å beregne $\langle\delta X^2\rangle_T = \frac{1}{3}\langle\delta R^2\rangle_T$ der δX er utslaget for oscillasjoner i X-retningen.
Beregn det termiske middel $\langle\delta X^2\rangle_T$ når egenfrekvensen til oscillatoren er ω. Benytt at egenverdiene til Hamiltonoperatoren for en harmonisk oscillator

$H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$ er $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, og at $\delta X = \left(\frac{\hbar}{2M\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(a + a^+)$ og $[a, a^+] = 1$.

Oppgave 3

a) Tilstandsvektoren for 2 partikler som er fermioner med bølgetallsvektorer k_1, k_2 og spinn σ_1, σ_2 kan skrives som $|k_1 k_2\rangle$. Hvordan kan denne uttrykkes ved vakuumtilstanden $|0\rangle$ ved å benytte kreasjonsoperatorene $c^+_{k\sigma}$. Vis at denne $|k_1 k_2\rangle$ oppfyller antisymmetriseringskravet for fermioner.

b) Elektron-fonon-elektron vekselvirkningen i et metall beskrives av operatoren

$$H_{int} = \sum_{\substack{kk'q \\ \sigma\sigma'}} v(q)\, c^+_{k+q,\sigma}\, c^+_{k'-q,\sigma'}\, c_{k'\sigma}\, c_{k\sigma}$$

Begrunn og forklar kort hvilke approksimasjoner (BCS reduksjon) som må foretas på denne for å komme fram til Hamiltonfunksjonen H_{BCS} som benyttes i teorien for supraledning. Skriv ned H_{BCS} .

c) Spenningen V_0 over en Josephson kontakt perturberes med en spenningspuls

$$V_1(t) = -\alpha \frac{t}{|t|} e^{-\epsilon|t|}$$

Det antas at $V_1(t)/V_0 \ll 1$. Strømmen gjennom kontakten er gitt ved

$$I = I_0 \sin(\omega t + \gamma(t) + \delta_0)$$

der

$$\omega = \frac{qV_0}{\hbar}$$

og

$$\gamma(t) = \frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} V_1(t')dt'$$

I_0 og δ_0 er konstanter. q er enhetsladningen som transporteres. Hvor stor er ladningen q ? Beregn $\gamma(t)$.

Spenningspulsen $V_1(t)$ fører til en netto ladningstransport gjennom kontakten. Beregn denne ladningstransporten Q når $\delta_0 = 0$ $(\gamma(t) \ll 1)$.