UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor J.S. Høye
Tlf. 3654

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER

Onsdag 29. august 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Hamiltonoperatoren for en harmonisk oscillator kan skrives

$$H = \hbar\omega(a^+a + \tfrac{1}{2})$$

der $$[a,a^+] = 1.$$

Vis at energiegenverdiene $E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})$.

b) Fonon-fonon vekselvirkningen består av ledd av typen

$$H_{int} = \sum(\ldots.ABC)$$

der A,B og C er operatorene a_{k_i} og $a^+_{k_i}$ med $i = 1,2,3$.

Uttrykt ved a_{k_i} og $a^+_{k_i}$, hvilke ledd er relevante ved fononoverganger?

Hva er bevarelseslovene for bølgetallsvektorene $\vec{k}_i$ og frekvensene ω_i $(i=1,2,3)$ ved fononoverganger i et krystallisk gitter? Hvordan oppstår termisk motstand ved fononprosesser?

c) For små frekvenser har longitudinale og transversale fononer henholdsvis lydhastighetene c_ℓ og $c_t = \gamma c_\ell$ med $\gamma < 1$.

Hva er sammenhengen (dispersjonsrelasjonen) mellom frekvens ω og bølgetallsvektor $\vec{k}$ for små ω for de to tilfellene?

To transversale fononer $\vec{k}_1$ og $\vec{k}_2$ med små frekvenser, kolliderer slik at et nytt fonon dannes. Bestem vinkelen $\vartheta(\neq 0)$ mellom $\vec{k}_1$ og $\vec{k}_2$ for at prosessen skal være mulig.

Oppgave 2

a) Betrakt operatoren

$$\phi = Aa + Ba^+$$

der A og B er tall mens a og a^+ er henholdsvis annihilasjonsoperatoren og kreasjonsoperatoren for harmonisk oscillator. Bestem $\langle n|Q^m|n\rangle$ for $m = 1,2,3,4$.

b) Bestem deretter termisk middel $\langle Q^m\rangle_T$ av Q^m for de samme verdiene $m = 1,2,3,4$ når Hamiltonoperatoren $H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$. [Hint: $\langle n\rangle_T$ og $\langle n(n-1)\rangle_T$ kan bestemmes først.]

Oppgitt:

$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

Oppgave 3

a) Skriv ned antikommuteringsrelasjonene for fermionoperatorene c_k og c_k^+ (der for enkelhets skyld spinnindeksen er inkludert i bølgetallet k).

Tilstandsvektoren for en fermiontilstand er gitt ved

$$|\psi\rangle' = \sum_{kk'} f(k,k')c_k^+c_{k'}^+|0\rangle$$

der $|0\rangle$ betegner vakuumtilstanden. Beregn den fouriertransformerte av Schrödinger bølgefunksjonen gitt ved

$$\tilde{\psi} = S|\psi\rangle$$

der S for N-partikkeltilstand er gitt ved

$$S = \frac{1}{\sqrt{N!}}\langle 0|\ c_{k_1}c_{k_2}\cdots\cdots c_{k_N}\ .$$

b) Spenningen V_0 over en Josephson kontakt perturberes med en spenningspuls

$$V_1(t) = -\alpha t e^{-\epsilon t^2}.$$

Det antas at $V_1(t)/V_0 \ll 1$. Strømmen gjennom kontakten er gitt ved

$$I = I_0 \sin(\omega t + \gamma(t) + \delta_0)$$

der

$$\omega = \frac{qV_0}{\hbar}$$

og

$$\gamma(t) = \frac{q}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} V_1(t')dt'$$

I_0 og δ_0 er konstanter. q er enhetsladningen som transporteres. Hvor stor er ladningen q ? Beregn $\gamma(t)$.
Spenningspulsen $V_1(t)$ fører til en netto ladningstransport gjennom kontakten. Beregn denne ladningstransporten Q når $\delta_0 = 0$ ($\gamma(t) \ll 1$).

Oppgitt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(\frac{b^2}{4a})$.