NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNING

Eksamen i fag 74440 Ladete Partiklers Fysikk

Onsdag 12. mai 1999 0900–1300 (4 timer)

Oppgave 1

a)
Busch-teoremet er bevarelsessatsen for generalisert dreieimpuls om symmetriaksen, gyldig for aksialsymmetriske feltkonfigurasjoner og relativistiske partikler.

Begrensninger:
- Aksialsymmetriske feltkonfigurasjoner
- Strålings-reaksjonskrefter er neglisjert

b)
Hull's cut-off betingelse: Se kompendiet LPF avsnitt 2.7.1. side 2/25.

En noe enklere utledning av U_0 er:

Anta at potensialfordelingen i røret er $U(R)$, med $U(R_1)=0$. Elektronene frigjøres fra katoden med null kinetisk energi. Ved radien R vil den kinetiske energien være $mv^2/2 = -eU(R)$, hvor v er elektronets totalhastighet, $v = v_R+v_\phi$. Elektronet vil snu innover mot katoden igjen ved den radius R_s hvor v_R = 0, altså hvor totalhastigheten $v = v_\phi$. Hvis $R_s < R_2$ når ingen elektroner anoden, og strømmen I er null. Hvis $R_s = R_2$ begynner akkurat strømmen å flyte. Hull's cut-off-spenning U_0 er altså den anode-spenning hvor elektronene når anoden med $v_R = 0$ og $v = v_\phi$:

$$U_0 = -mv_\phi(R_2)^2 \big/ 2e \ .$$

Men v_ϕ er gitt av Busch-teoremet for denne aksialsymmetriske feltkonfigurasjonen:

$$L_z + \frac{e\Phi(R)}{2\pi} = \frac{e\Phi(R_1)}{2\pi} \quad , \quad \text{med } L_z = mRv_\phi \quad \text{og} \quad \Phi(R) = \pi R^2 B \ . \text{ Dette gir:}$$

$$v_\phi(R_2) = -\frac{eB}{2mR_2}(R_2^2 - R_1^2)$$

$$\underline{\underline{U_0 = -\frac{eB^2}{8m} R_2^2\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^2 = -\frac{\omega_c^2 m}{8e} R_2^2\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^2}} \qquad \text{Hull's cut-off-spenning}$$

Innsatt tallverdier: $\underline{\underline{U_0 = 38.71 \text{ kV}}}$

c)
Alle elektroner i sirkelbaner om origo: Merk at Busch-teoremet ikke kan brukes her, siden elektronene er blitt bremset av intern friksjon.

Kraftlikevekt for sirkelbevegelse om origo med radius R, vinkelfrekvens ω_o og elektrisk felt $E(R)$:

$$mR\omega_o^2 + e\omega_o RB + eE(R) = 0$$

$$E(R) = -\frac{mR}{e}\omega_o(\omega_o - \omega_c) \qquad \omega_c \equiv -\frac{eB}{m}$$

Poisson's likning ved sylindersymmetri uten *z*-avhengighet:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{R}\frac{d}{dR}(RE) = -\frac{2m}{e}\omega_o(\omega_o - \omega_c) = \frac{\rho}{\varepsilon_o} = \frac{en(R)}{\varepsilon_o}$$

$$n(R) = -\frac{2m\varepsilon_o}{e^2}\omega_o(\omega_o - \omega_c)$$ Uniform romladningstetthet, uavhengig av *R*.

Vi finner ω_0 ved å integrere opp *E(R)* mellom katode og anode, og sette inn Hull's cut-off-spenning:

$$U_0 = -\int_{R_1}^{R_2} E(R)\,dR = \frac{m}{2e}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\omega_o(\omega_o - \omega_c) = -\frac{\omega_c^2 m}{8e}R_2^2\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^2$$

Dette gir en annengradslikning for ω_0 :

$$\omega_o(\omega_o - \omega_c) = -\frac{\omega_c^2}{4}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \qquad \omega_o^2 - \omega_o\omega_c + \frac{\omega_c^2}{4}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = 0$$

med løsninger: $$\underline{\underline{\omega_o = \frac{\omega_c}{2}\left(1 \pm \frac{R_1}{R_2}\right)}}$$ Fra dette finnes *n(R)* og *E(R)* :

$$\underline{\underline{n(R) = \frac{m\varepsilon_o}{2e^2}\omega_c^2\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)}} \qquad \underline{\underline{E(R) = \frac{mR}{4e}\omega_c^2\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)}}$$

d)

Virkemåten til magnetron-røret: Se LPF kompendiet Kap. 2 avsnitt 2.7.2 side 2/27

Oppgave 2

a)

Vekst av elektronlavine i felt E(R):

Primær ionisasjonskoeffisient α: Se LPF kompendiets Kap. 9 s. 9/15.

Lavinevekst, når $N_e(R_k)$ elektroner starter fra katoden ved $R = R_k$:

$$dN_e(R) = \alpha(R)N_e(R)dR \qquad N_e(R) = N_e(R_k)\exp\int_{R_k}^{R}\alpha(R)dR$$

Integralet $\int_{R_k}^{R}\alpha(R)dR$ kalles ionisasjonsintegralet, og kan regnes ut når *α(E)* og *E(R)* er kjente.

b)

Selvstendig Townsendutladning: Se LPF kompendiets Kap.9 avsn.9.1.1

c)
Drifttid T for ladet partikkel mellom R_1 og R_2:

Det er erfaringsmessig overraskende mange som har vansker med dette enkle spørsmålet. De setter greitt opp formelen for drifthastigheten til den ladete partikkelen $v = \mu E(R)$, men så kommer de ikke på at $v = dR/dt$:

$$v = \frac{dR}{dt} = \mu E(R) \qquad dt = \frac{dR}{\mu E(R)} \qquad T = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\mu E(R)}$$

For sylindersymmetri uten romladninger:

$$E(R) = E(R_1)\frac{R_1}{R} \qquad U = -\int_{R_1}^{R_2} E(R)\, dR = -E(R_1)R_1 \ln(R_2/R_1) \qquad E(R) = \frac{-U}{R\ln(R_2/R_1)}$$

$$\underline{\underline{T = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\mu E(R)} = -\frac{\ln(R_2/R_1)}{\mu U}\int_{R_1}^{R_2} R\, dR = -\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\mu U}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \approx -\frac{R_2^2 \ln(R_2/R_1)}{2\mu U}}}$$

Den siste tilnærmelsen er god siden $R_1 << R_2$. Det negative fortegnet skyldes at U er negativ for en positiv partikkel. Drifttiden er den samme for en negativ partikkel som driver motsatt vei med samme mobilitet μ .

d)
Strøm indusert i ytre krets av en ladet partikkels drift mellom R_1 og R_2:

Shockley-Ramo-teoremet sier: $I(t) = -qvE^1$, hvor v er partikkelens hastighet ved tiden t, og E^1 er det geometrisk bestemte feltet i partikkelposisjonen p.g.a. 1 volt mellom R_2 og R_1 :

$$v = \mu E(R) \qquad E(R) = \frac{-U}{R\ln(R_2/R_1)} \qquad E^1(R) = \frac{-1}{R\ln(R_2/R_1)} \qquad I(R) = \frac{q\mu U}{R^2\left(\ln(R_2/R_1)\right)^2}$$

Vi skal finne *I(t)*, og må derfor sette inn *R(t)* i uttrykket for *I(R)*. *R(t)* finner vi fra uttrykket for transitt-tiden *T* i spørsmål c), ved å sette øvre eller nedre grense i integralet lik *R*.

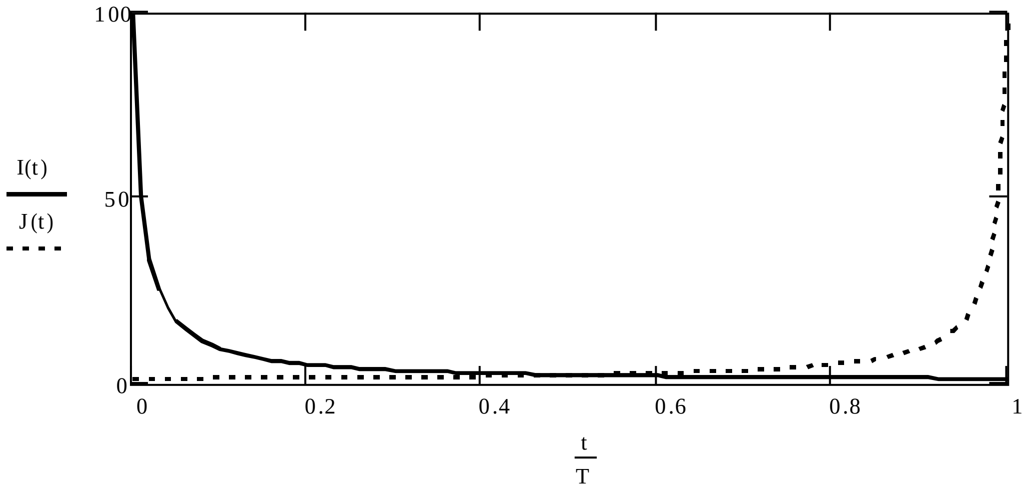
Vi ser først på en ladet partikkel som går fra R_1 til R_2. Vi regner alle størrelser i formlene for positive, for å unngå fortegnsusikkerheter. Det er fordelaktig å innføre transitt-tiden *T* for å få mer oversiktlige formler.

$$R^2 = R_1^2 + \frac{2\mu U}{\ln(R_2/R_1)}t = R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\frac{t}{T} \qquad \underline{\underline{I(t) = \frac{q\mu U}{\left(R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\frac{t}{T}\right)\left(\ln(R_2/R_1)\right)^2}}}$$

Så ser vi på en partikkel som går fra ytre elektrode R_2 og innover:

$$R^2 = R_2^2 - \frac{2\mu U}{\ln(R_2/R_1)}t = R_2^2 - (R_2^2 - R_1^2)\frac{t}{T} \qquad \underline{\underline{I(t) = \frac{q\mu U}{\left(R_2^2 - (R_2^2 - R_1^2)\frac{t}{T}\right)\left(\ln(R_2/R_1)\right)^2}}}$$

Hvis vi innfører en "revers tid" $t' = T - t$ i formlen over, ser vi at de to tidsforløpene er speilbilder av hverandre langs tidsaksen. Plottene under er for et forhold $R_2/R_1 = 10$:



e1)

Strøm indusert i ytre krets av et elektron sluppet løs fra indre elektrode, med lavinemultiplikasjon 10

Det ene elektronet vil produsere 9 nye elektroner og 9 positive ioner i ionisasjonssonen tett inne ved indre elektrode. De positive ionene vil ”øyeblikkelig” drive inn til indre elektrode og forsvinne uten å indusere merkbar strøm. De 10 elektronene vil drive ut mot ytre elektrode, og indusere en strøm som minsker med tiden etter formlene i spørsmål d), av varighet en elektrontransitt-tid T_e .

e2)

Strøm indusert i ytre krets av et elektron sluppet løs fra ytre elektrode, med lavinemultiplikasjon 10

Det ene elektronet vil først drive fra ytre til indre elektrode i løpet av elektrontransitt-tiden T_e. Den induserte strømkurven vil være ”speilbildet” av kurven i spørsmål e1), men ti ganger mindre i amplitude (bare ett elektron).

Inne i ionisasjonssonen ved indre elektrode vil elektronet lage 9 nye elektroner og 9 positive ion. De 9 elektronene forsvinner inn i indre elektrode uten å gi merkbar strøm. De 9 positive ionene driver utover mot ytre elektrode, og vil indusere en strøm av samme form som 9 elektroner ville gjort (se e1)), men 100 ganger langsommere og med 100 ganger mindre amplitude.

Trondheim 001020 R S Sigmond