 Orig.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. E.H. Hauge
Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 74941 FASEOVERGANGER OG KRITISKE FENOMENER
Onsdag 19.mai 1993
kl.0900 - 1500.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

NB. 1. Definisjoner av kritiske eksponenter (mm) er oppgitt i slutten av oppgavesettet.
2. Alle underpunkt i oppgavesettet har i utgangspunktet lik vekt.
3. Vær oppmerksom på at et punkt ofte kan besvares uavhengig av tidligere punkt i oppgaven!

Oppgave 1

a. Bruk fluktuasjonsteoremet på formen

$$\chi = \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T = \frac{1}{k_B T} \sum_j \Gamma_{ij}$$

til å utlede eksponentrelasjonen $\gamma = \nu(2-\eta)$.

b. Landau-Ginzburg teorien gir korrelajonsfunksjonen på formen

$$\Gamma_k^m = \frac{1}{V} \langle m_{-\vec{k}} m_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{a\tau + gk^2} .$$

Bruk dette til å bestemme de tilsvarende verdiene for eksponentene ν og η .

Oppgitt: $$\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\alpha^2+k^2} = c \frac{e^{-\alpha r}}{r^{(d-1)/2}} \int_0^\infty dy\, e^{-y} \left(2\alpha y + \frac{y^2}{r}\right)^{\frac{d-3}{2}}$$

der c er en konstant og d er romdimensjonaliteten.

c. Skisser ideen bak Ginzburg-kriteriet og bruk denne tankegangen til å bestemme øvre kritiske dimensjonalitet, d_c, for en Ising ferromagnet.

d. Forklar, på basis av Landauteori med skalar ordensparameter, hva som menes med et trikritisk punkt. Bruk så argumentasjon tilsvarende den under punkt c til å bestemme øvre kritiske dimensjonalitet, d_{ct}, for et trikritisk punkt.

Oppgave 2

a. Anta at et d-dimensjonalt spinnsystem er ekstremt anisotropt, slik at spinnet $\vec{s}_i$ (med $|\vec{s}_i|=1$) bare kan peke i (en av) de 2d retningene med kubisk symmetri. Anta videre at Hamiltonfunksjonen for spinn-spinn vekselvirkninger har formen

$$H = \sum_{<ij>} f(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j) \tag{2.1}$$

der summen går over alle nærmeste nabo par. Vis at denne modellklassen, i 2 romdimensjoner, er ekvivalent med Ashkin-Teller modellen, definert ved

$$H = -J \sum_{<ij>} (s_i s_j + t_i t_j) - L \sum_{<ij>} s_i s_j t_i t_j \tag{2.2}$$

der $s_i=\pm 1$, $t_i=\pm 1$. Hva er modellens grunntilstander når $J > 0$, $L > 0$?

b. Identifiser komponentene, ψ_1, ψ_2, ψ_3, til ordensparameteren for Ashkin-Teller modellen, og bruk symmetriargumenter til å vise at den tilsvarende Landau fri energi har formen

$$\Delta F_L = \frac{r}{2}\left(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\right) + \frac{\delta r}{2}\,\psi_3^2 - \frac{c}{3!}\,\psi_1\psi_2\psi_3 + \frac{u}{4!}\left(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\right)^2$$

$$+ \frac{v}{4!}\left(\psi_1^4+\psi_2^4+\psi_3^4\right) + \frac{\delta u}{4!}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\psi_3^2 + \frac{\delta v}{4!}\,\psi_3^4 + \ldots \tag{2.3}$$

Vi antar at vi i det følgende kan sette $\delta u = \delta v = 0$.

c. Bestem universalitetsklassen til den første faseovergangen, når temperaturen senkes i den uordnete høgtemperaturfasen, for de 3 tilfellene $\delta r > 0$, $\delta r < 0$ og $\delta r = 0$.
Hvilke komponenter av ordensparameteren blir forskjellig fra null i de 3 tilfellene. Grunngi svaret.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi se på en direkteroms renormaliseringsgruppe transformasjon av Ashkin-Teller modellen på et kvadratisk gitter i 2 romdimensjoner, og med null ytre felt. For en kvadratisk celle med 4 spinn brukte H.Knops (1975) en symmetrisk versjon av Niemeijer-van Leeuwen prosedyren, og fant til første orden i kumulantutviklingen

$$K_1' = 2K_1\left(\frac{e^{8K_1+4K_2} + 9e^{4K_1} + 2e^{4K_2} + 12}{e^{8K_1+4K_2}+14e^{4K_1}+7e^{4K_2}+36+6e^{-4K_1}}\right)^2$$

$$K_2' = 2K_2\left(\frac{e^{8K_1+4K_2} + 4e^{4K_1} + 7e^{4K_2} + 12}{e^{8K_1+4K_2}+14e^{4K_1}+7e^{4K_2}+36+6e^{-4K_1}}\right)^2 \qquad (3.1)$$

der $K_1 = J/k_BT$, $K_2 = L/k_BT$ og J,L er parametrene i Hamiltonfunksjonen (2.2).

a. Vis, uten detaljerte regninger, at transformasjonen (3.1) har 4 ikke-trivielle fikspunkt, nemlig

1. På K_1-aksen: $(K_{11}^*,0)$, med $K_{11}^* \neq 0$.
2. På K_2-aksen: $(0, K_{22}^*)$, med $K_{22}^* \neq 0$.
3. For endelig K_1 i grensen $K_2 \to \infty$: (K_{13}^*, ∞) med $K_{13}^* \neq 0$.
4. På symmetriaksen $K_1=K_2$: (K_4^*, K_4^*), med $K_4^* \neq 0$.

b. Lokaliser de to fikspunktene 2 og 3 numerisk. Bestem den relevante egenverdien, λ_T, og den tilsvarende eksponenten α i hvert av disse to fikspunktene.

c. Nær fikspunkt nr.4, $K_1 = K_2 = K_4^* \approx 0.3935$ gir linearisering av transformasjonen (3.1),

$$\begin{pmatrix} \delta K_1' \\ \delta K_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.10623 & 0.33131 \\ 0.67821 & 1.75933 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta K_1 \\ \delta K_2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Beregn denne transformasjonens egenverdier, venstre egenvektorer, $\vec{\phi}^i$, og skaleringsfeltene $u_i = \vec{\phi}^i \cdot \delta\vec{K}$.

Skisser det globale transformasjonsmønstret i planet (K_1, K_2) [for $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$] , generert av den ikke-lineære transformasjonen (3.1).
Begrunn hvorfor det er den største egenverdien i (3.2) som bestemmer α i dette tilfellet.

Oppgitt:

Varmekapasitet	$C \sim \lvert\tau\rvert^{-\alpha}$	$\tau \gtrless 0$
Ordensparameter	$\psi \sim (-\tau)^{\beta}$	$\tau < 0$
Susceptibilitet	$\chi \sim \lvert\tau\rvert^{-\gamma}$	$\tau \gtrless 0$
Kritisk isoterm	$m \sim h^{1/\delta}$	$\tau = 0$
Korrelasjonslengde	$\xi \sim \lvert\tau\rvert^{-\nu}$	$\tau \gtrless 0$
Korrelasjonsfunksjon	$\Gamma(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$	$\tau = 0$

Termisk egenverdi $\lambda_\tau = \ell^{y_\tau}$ (ℓ: reskaleringsfaktor)

$2 - \alpha = \dfrac{d}{y_\tau}$.