FASEOVERGANGER & KRITISKE FENOMENER

EKSAMEN 19.5.93

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a Nær kritisk punkt er $\chi \sim |\tau|^{-\gamma}$, $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ og for $r_{ij} < \xi$, $\Gamma_{ij} \sim r_{ij}^{-(d-2+\eta)}$, mens Γ_{ij} faller raskt (eksponentielt) av når $r_{ij} > \xi$.
Siden Γ_{ij} alltid er endelig kan χ bare divergere dersom $\sum_j \Gamma_{ij}$ gjør det, pga langsomt fallende Γ_{ij} for store r_{ij}. Altså:

$$\sum_j \Gamma_{ij} \sim \int^{\xi} dr\, r^{d-1}\, r^{-(d-2+\eta)} \sim \int^{\xi} dr\, r^{1-\eta} \sim \xi^{2-\eta}$$

$$\sim |\tau|^{-\nu(2-\eta)} \sim \chi \sim |\tau|^{-\gamma} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = \nu(2-\eta)} \text{ qed.}$$

b

$$\Gamma(r) \simeq \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{a\tau + gk^2} = \frac{c}{g} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\frac{d-1}{2}}} \int_0^\infty dy\, e^{-y} \left(2\alpha y + \frac{y^2}{r}\right)^{\frac{d-3}{2}} ; \alpha^2 = \frac{a\tau}{g}$$

Korrelasjonslengden er åpenbart gitt av $e^{-\alpha r} = e^{-r/\xi}$ her slik at

$$\xi = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{g}{a\tau}} \quad \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{2}}$$

Eksponenten η er definert for $r \ll \xi$. Vi lar derfor $\xi \to \infty$, dvs $\alpha \to 0$ slik at

$$\Gamma(r) = \frac{c}{g} r^{-\frac{d-1}{2} - \frac{d-3}{2}} \int_0^\infty dy\, y^{d-3} e^{-y}$$

Integralet konvergerer for $d > 2$ slik at

$$\Gamma(r) \sim r^{-(d-2)} \quad \Rightarrow \boxed{\eta = 0}$$

(I $d=2$ gir Landau-Ginzburg logaritmiske komplikasjoner)

c Ginzburg-kriteriet: Klassisk Landau og Landau-Ginzburg teori er bare konsistent dersom fluktuasjon. kvadratet ikke er større enn at 2. ordens leddet i Landau-teorien dominerer over 4. ordens leddet:

$$\int d\vec{r} \langle \delta m(0)\, \delta m(\vec{r}) \rangle = \Gamma^m_0 = \frac{1}{a\tau} \sim \underbrace{\xi^d (\delta \hat{m})^2}_{\text{Dette er L-G's estimat for fluktuasjon.-kvadratet } (\delta \hat{m})^2}$$

Landau-Ginzburg

Landau's fri energi

$$\Delta F_L = \frac{r}{2} m^2 + \frac{u}{4!} m^4$$

$$L = \perp \text{ når } \bar{m}^2 = 12 \frac{r}{u} \sim \tau$$

Ginzburg-kriteriet: $(\delta \hat{m})^2 \ll \bar{m}^2 \Rightarrow \frac{1}{\tau \xi^d} \ll \tau$

$$\Rightarrow \quad \tau^{\nu d - 2} = \tau^{\frac{1}{2}(d-4)} \ll 1$$

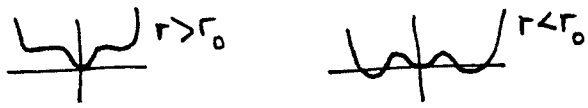
$\Rightarrow$ For $d > d_c = 4$ er klassisk L-G teori selvkonsistent!

d Landau-teori med 6. ordens ledd:

$$\Delta F_L = \frac{r}{2} m^2 + \frac{u}{4!} m^4 + \frac{w}{6!} m^6 + \cdots$$

$u > 0 \Rightarrow$ 

Kontinuerlig faseovergang

$u < 0 \Rightarrow$ 

1. ordens faseovergang

$u = 0 \Rightarrow$ Trikritisk punkt, der kont. $\rightleftarrows$ 1. orden

Ginzburgkriterium ved trikritisk punkt

$$\Gamma^m_0 = \frac{1}{a\tau} \sim \xi^d (\delta \hat{m})^2 \quad \text{som før.}$$

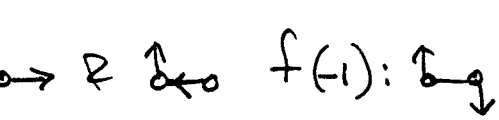
Nå: Karakteristisk $\bar{m}$ gitt av $\frac{r}{2}\bar{m}^2 = \frac{w}{6!}\bar{m}^6 \Rightarrow \bar{m}^4 = \frac{6!}{2w} a\tau \sim \tau$

$$\Rightarrow (\delta \hat{m})^2 \ll \bar{m}^2 \Rightarrow \frac{1}{\tau \xi^d} \ll \tau^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \tau^{\nu d - \frac{3}{2}} \ll 1$$

Øvre kritisk dimensjonalitet ved trikrit pkt: $\boxed{d_c = 3}$

Oppgave 2

a Med ekstrem anisotropi kan $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ bare ante 3 forskjellige verdier, $(-1, 0, 1)$. Mulige energier knyttet til nærmeste nabo-bånd blir derfor

$f(1)$: $f(0)$:  & $f(-1)$: 

Ashkin-Teller modellen i 2 dimensjoner har, slik den er behandlet i forelesningene, følgende nabo-bånd energier

$-2J-L$ $\quad$ $2J-L$ $\quad$ L $\quad$ L

Bortsett fra den trivielle forskjellen knyttet til spinnenes retning (som selvsagt kan bringes i samsvar, siden den er rent konvensjonell), er strukturen presis den samme! Den tilsynelatende forskjellen knyttet til at $f(1), f(0)$ & $f(-1)$ er 3 parametre, mens J & L er to, er også uten betydning siden kravet $\sum_{\vec{S}_i^2} f(\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) = 0$ simpelten fastlegger energiens 0-punkt. Nettopp denne konvensjonen er oppfylt i A-T modellen: $(-2J-L) + (2J-L) + L + L \equiv 0$.

<u>Altså</u>: I 2 romdimensjoner er (2.1) ekvivalent (i det ekstremt anisotrope tilfellet) med (2.2).

Når $J > 0$, $L > 0$ er  den energetisk favorable nabokonfigurasjon og grunntilstandene er åpenbart de 4 ferromagnetiske, med alle spinn pekende i én og samme (av 4 mulige) retning.

b. Ordensparameteren for AT modellen (2.2) har komponentene

$$\psi_1 = \langle s_i \rangle \; ; \; \psi_2 = \langle t_i \rangle \; ; \; \psi_3 = \langle s_i t_i \rangle$$

Den siste skiller mellom de to diagonalene i AT formuleringen (2.2).

Symmetrier: Hamiltonfunksjonen (2.2) er invariant overfor

① $s_i \to -s_i$ (alle i) $\Rightarrow$ $\psi_1 \to -\psi_1$; $\psi_2 \to \psi_2$; $\psi_3 \to -\psi_3$

② $t_i \to -t_i$ (-"-) $\Rightarrow$ $\psi_1 \to \psi_1$; $\psi_2 \to -\psi_2$; $\psi_3 \to -\psi_3$

③ $s_i \rightleftarrows t_i$ (-"-) $\Rightarrow$ $\psi_1 \rightleftarrows \psi_2$; $\psi_3 \to \psi_3$

$\Rightarrow$ I ΔF_L er

1. ordens ledd uakseptable

2. ordens ledd OK, men med symmetri $\psi_1 \rightleftarrows \psi_2$

3. ordens ledd: $\psi_1 \psi_2 \psi_3$ OK, ingen andre

4. ordens ledd: Alle kombinasjoner av 2. ordens-ledd med symmetri $\psi_1 \rightleftarrows \psi_2$ OK

$$\Rightarrow \Delta F_L = \frac{r}{2}(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) + \frac{\delta r}{2}\psi_3^2 - \frac{c}{3!}\psi_1\psi_2\psi_3 + \frac{u}{4!}(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2)^2 + \frac{v}{4!}(\psi_1^4 + \psi_2^4 + \psi_3^4) + \frac{\delta u}{4!}(\psi_1^2 + \psi_2^2)\psi_3^2 + \frac{\delta v}{4!}\psi_3^4 + \dots$$

eventuelt andre, ekvivalente, måter å uttrykke de samme symmetriene på.

c La nå

$$\Delta F_L = \frac{r}{2}\left(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\right) + \frac{\delta r}{2}\psi_3^2 - \frac{c}{3!}\psi_1\psi_2\psi_3$$
$$+\frac{u}{4!}\left(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\right)^2 + \frac{v}{4!}\left(\psi_1^4+\psi_2^4+\psi_3^4\right)$$

Dersom $\underline{\delta r > 0}$

vil $r+\delta r > r$ slik at $\psi_1^2+\psi_2^2$-leddet gir kritikalitet før ψ_3^2 gjør det.

$\Rightarrow$ Effektiv Landau med $\psi_3 = 0$:

$$\Delta F_L^{(1)} = \frac{r}{2}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right) + \frac{u}{4!}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)^2 + \frac{v}{4!}\left(\psi_1^4+\psi_2^4\right)$$

som definerer Universalitetsklassen "xy, med kubisk anisotropi."

Dersom $\underline{\delta r < 0}$

vil $r+\delta r < r$ og ψ_3^2-leddet går kritisk først.

Derved blir effektiv Landau-energi

$$\Delta F_L^{(2)} = \frac{r+\delta r}{2}\psi_3^2 + \frac{u+v}{4!}\psi_3^4$$

U-klasse: Ising

Dersom $\underline{\delta r = 0}$

$$\Delta F_L^{(3)} = \frac{r}{2}\left(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\right) - \frac{c}{3!}\psi_1\psi_2\psi_3 + \frac{u}{4!}\left(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\right)^2 +$$
$$+\frac{v}{4!}\left(\psi_1^4+\psi_2^4+\psi_3^4\right)$$

U-klasse: 4-tilstands Potts.

Like under kritisk temperatur er

$\underline{\delta r = 0}$: Alle, $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \neq 0$

$\underline{\delta r < 0}$: Bare $\psi_3 \neq 0$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$

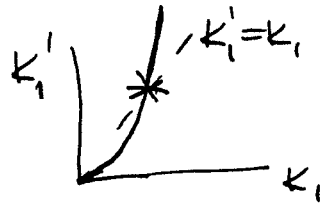
$\underline{\delta r > 0}$: I utgangspunktet $\psi_1 \neq 0, \psi_2 \neq 0$ og $\psi_3 = 0$, men $\psi_1\psi_2\psi_3$-leddet virker da som et ytre felt ledd på ψ_3 slik at $\psi_3 \sim \psi_1 \cdot \psi_2$.
(dvs ψ_3 høyere orden enn ψ_1 & ψ_2)

Oppgave 3

a ① $K_2=0 \Rightarrow$

$$K_1' = 2K_1\left(\frac{e^{8K_1}+9e^{4K_1}+14}{e^{8K_1}+14e^{4K_1}+43+6e^{-4K_1}}\right)^2 \simeq \begin{cases} \frac{9}{32}K_1 \; ; \; K_1 \ll 1 \\ 2K_1 \; ; \; K_1 \gg 1 \end{cases}$$

Derved må det finnes et ikke-trivielt fikspunkt for endelig K_1 :



② $K_1=0$

$$K_2' = 2K_2\left(\frac{8e^{4K_2}+16}{8e^{4K_2}+56}\right)^2 = 2K_2\left(\frac{e^{4K_2}+2}{e^{4K_2}+7}\right)^2 \simeq \begin{cases} \frac{9}{32}K_1 \; ; \; K_1 \ll 1 \\ 2K_1 \; ; \; K_1 \gg 1 \end{cases}$$

Igjen, ikke-trivielt fikspunkt må finnes langs K_2-aksen

③ $K_2 \to \infty$

$$K_1' = 2K_1\left(\frac{e^{8K_1}+2}{e^{8K_1}+7}\right)^2 \simeq \begin{cases} \frac{9}{32}K_1 \; ; \; K_1 \ll 1 \\ 2K_1 \; ; \; K_1 \gg 1 \end{cases}$$

Som ② & ①

④ $K_1=K_2=K$

Begge transformasjonene i (3.1) får samme form, nemlig

$$K' = 2K\left(\frac{e^{12K}+11e^{4K}+12}{e^{12K}+21e^{4K}+36+6e^{-4K}}\right)^2 \simeq \begin{cases} \frac{9}{32}K \; ; \; K \ll 1 \\ 2K \; ; \; K \gg 1 \end{cases}$$

Som de foregående!

Altså: Det finnes 4 ikke-trivielle fikspunkt, slik som påstått.

b Fikspunkt ②:

$$k_{22}^* = 2k_{22}^* \left(\frac{e^{4k_{22}^*}+2}{e^{4k_{22}^*}+7} \right)^2 \qquad \text{Kall } x \equiv e^{4k_{22}^*} \Rightarrow \frac{x+2}{x+7} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 10.07 \quad ; \quad k_{22}^* = 0.5774$$

· Fikspunkt ③

$$k_{13}^* = 2k_{13}^* \left(\frac{e^{8k_{13}^*}+2}{e^{8k_{13}^*}+7} \right)^2 \Rightarrow k_{13}^* = \frac{k_{22}^*}{2} = 0.2887$$

Relevant egenverdi: $\lambda_\tau = \left(\frac{dk'}{dk}\right)_{k^*}$. La $x = e^{ak^*}$, der $a=4$ i tilfelle ②, $a=8$ i tilfelle ③. Lineariser:

$$k^* + \overset{\text{avvik fra } k^*}{\delta'} = 2(k^* + \delta) \left[\frac{x(1+a\delta)+2}{x(1+a\delta)+7} \right]^2$$

$$= 2(k^*+\delta) \underbrace{\left(\frac{x+2}{x+7}\right)^2}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{2ax}{x+2}\delta}{1 + \frac{2ax}{x+7}\delta}$$

$$\delta' = \delta \left[1 + 2x \underbrace{ak^*}_{=\ln x} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+7} \right) \right]$$

, uansett verdi på a!

Så:

$$\lambda_\tau = 1 + \frac{10x\ln x}{(x+2)(x+7)} = 2.129 \quad \text{både for ② og ③}$$

$$y_\tau = \frac{\ln \lambda_\tau}{\ln 2} = 1.09$$

$$2 - \alpha = \frac{2}{y_\tau} \qquad \boxed{\alpha = 0.17} \quad \text{både i ② og ③}$$

c Egenverdiene til $\delta\vec{K}' = T \cdot \delta\vec{K}$ følger av

$$\| T - \lambda \mathbb{I} \| \equiv \left\| \begin{matrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{matrix} \right\| = 0 \quad \Rightarrow (A-\lambda)(D-\lambda) - BC = 0$$

eller

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(A+D) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(A-D)^2 + BC}$$

$$= 1.93278 \pm 0.50476 = \begin{cases} 2.43754 \\ 1.42802 \end{cases}$$

Dvs: <u>To</u> relevante egenverdier i dette tilfellet!

Venstre egenvektorer

$$\vec{\Phi}^{(1)} \cdot T = \lambda_1 \vec{\Phi}^{(1)} \quad ; \quad \vec{\Phi}^{(2)} \cdot T = \lambda_2 \vec{\Phi}^{(2)}$$

Normeringen er irrelevant, så vi velger å skrive

$$\vec{\Phi}^{(1)} = (1, f) \quad ; \quad \vec{\Phi}^{(2)} = (1, g)$$

$$\Rightarrow \quad (1, f) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \lambda_1 (1, f)$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{\lambda_1 - A}{C} = \frac{B}{\lambda_1 - D} = 0.4885$$

$$(1, g) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \lambda_2 (1, g)$$

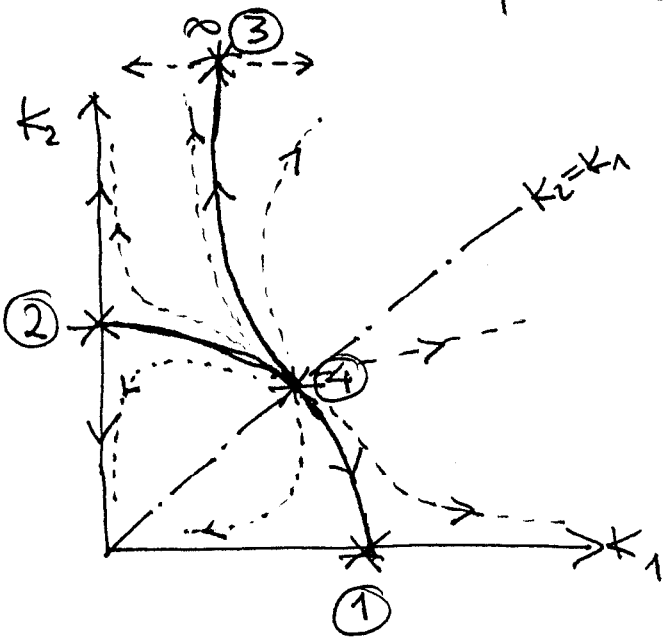
$$g = \frac{\lambda_2 - A}{C} = \frac{B}{\lambda_2 - D} = -1$$

Skalerings feltene blir derved, $u_i = \vec{\Phi}^{(i)} \cdot \delta\vec{K}$,

$$u_1 = \delta K_1 + 0.4885\, \delta K_2$$

$$u_2 = \delta K_1 - \delta K_2$$

Globalt transformasjonsbilde



Merk at $u_2 = \delta K_1 - \delta K_2$ representerer en retning som (i ④) står <u>loddrett</u> på temperaturaksen, her $K_1 = K_2$.

Derved vil α være bestemt av λ_1 i dette tilfellet! Dette ville faktisk vært tilfelle <u>også</u> om λ_2 (i "u_2-retn") hadde vært størst, pga ortogonaliteten.

Men stort sett vil jo den <u>største</u> egenverdien bestemme α, simpelthen fordi den største egenverdien gir den dominerende singulariteten. Eneste mulige unntak er altså dersom temperaturretningen skulle være ortogonal til egenvektoren med størst λ.
I vårt eksempel har vi en sumpr-på-feeste situasjon
"Ethvert" argument gir riktig konklusjon!

Tall: $\alpha = 2 - \frac{2}{y_t} = 0.44$

Merk at <u>topologien</u> i transformasjonsdiagrammet svarer presis til Ashkin-Teller modellens (Fig. 5.8), at det <u>stemmer</u> at α er den <u>samme</u> i ② og ③, begge er <u>Ising</u> (og tallet 0.17 <u>skulle</u> vært 0 (eks), men–). Videre $\alpha = 0.44$ svarer til 4-tilstands Potts. <u>Støtte</u> enn Ising (OK!). <u>Men</u>: skulle vært $2/3 = 0.$