UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Kåre Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 74943

Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

Torsdag 13. desember 1990

Tid: Kl. 0900–1300

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B
Godkjent lommekalkulator tillatt
K.Rottmann: *Matematische Formelsammlung*

Eksamensoppgaven består av 2 sider.

---

1. Se på differensialligningen
$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{x\,dx} + \frac{1}{x^4}\right] y(x) = 0.$$
   (a) Finn og klasssifiser de singulære punktene til denne ligningen.
   (b) Bestem de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $y(x)$ når
      i. $x \to 0$.
      ii. $x \to 1$.
      iii. $x \to \infty$.

2. (a) Fakultetsfunksjonen $n! = \Gamma(n+1)$ har en integralrepresentasjon
$$n! = \int_0^\infty dt\, t^n e^{-t}$$
   Benytt denne til å finne den ledende asymptotiske oppførsel for
      i. $n!$ når $n \to \infty$ (langs positive relle verdier).
      ii. $\Gamma(n+1)$ når $n \to +i\infty$ (langs imaginære verdier, med $\Im n$ positiv).

(b) Se på integralet

$$I(N) = \int_0^\infty dt\, e^{-(t+N)^2}$$

når $N \to \infty$.

i. Bestem alle leddene i den asymptotiske rekken for $I(N)$ når $N \to \infty$.

ii. For en gitt stor N, estimer det optimale antallet ledd som bør tas med i denne rekken for å oppnå best nøyaktighet.

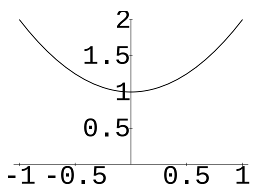
iii. For en gitt stor N, estimer hvilken nøyaktighet som kan oppnås fra denne rekken (uten resummmasjon).

3. Se på randverdiproblemet

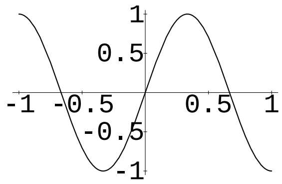
$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + y(x) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 1$$

i grensen $\varepsilon \to 0$. Ved hvilke posisjoner får vi grensesjikt, og hvordan skalerer tykkelsen av disse med ε, når

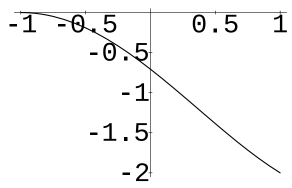
(a) $a(x) = 1 + x^2$, som på figuren under



(b) $a(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$, som på figuren under



(c) $a(x) = -(1+x)\sin[\frac{\pi}{4}(1+x)]$, som på figuren under



4. Finn ledende ordens løsning til startverdiproblemet

$$\ddot{y} + e^{\varepsilon t} y = 0, \quad \text{med } y(0) = 1,\, \dot{y}(0) = 0.$$

når $\varepsilon \to 0^+$.