Fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 13.12.1990

1. Ligningen var

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{1}{x^4}\right] y(x) = 0. \tag{1}$$

(a) Vi ser direkte at (1) har et irregulært singulært punkt i $x = 0$. Ved transformasjonen $t = 1/x$, $Y(t) = y(x)$, dvs.

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx} = t\left(-t^2\frac{d}{dt}\right), \quad \frac{d^2}{dx^2} = \left(-t^2\frac{d}{dt}\right)^2 = t^4\frac{d}{dt^2} + 2t\frac{d}{dt},$$

får vi ligningen

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt} + 1\right] Y(t) = 0, \tag{2}$$

som sees å ha et regulært singulært punkt i $t = 0 \Leftrightarrow x = \infty$.

(b) i. Når $x \to 0$ gjør vi den eksponensielle substitusjonen,

$$y = e^S,$$

og finner

$$(S')^2 + S'' + \frac{1}{x}S' + \frac{1}{x^4} = 0. \tag{3}$$

Antar at $S'' \ll (S')^2$ når $x \to 0$. Ledende balanse blir da

$$(S')^2 + \frac{1}{x}S' + \frac{1}{x^4} \Rightarrow S' = \mp\frac{i}{x^2} + O(\frac{1}{x}),$$

som er konsistent med antagelsen. Merk at også $x^{-1}S'$-leddet i (3) er neglisjerbart til ledende orden. Vi skriver så

$$S = S_0 + S_1 + \cdots \equiv \pm\frac{i}{x} + S_1 + \cdots$$

som innsatt gir

$$2S_0'S_1' + S_0'' + \frac{1}{x}S_0' = \mp i\left(\frac{2}{x^2}S_1' - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = 0,$$

dvs.

$$S_1' = \frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \log\sqrt{x}.$$

Mulig asymptotisk oppførsel når $x \to 0$ er altså

$$y(x) \sim \sqrt{x}e^{\pm ix^{-1}}. \tag{4}$$

ii. Siden $x = 1$ er et ordinært punkt for (1) må

$$y(x) \sim 1, \quad \text{eller} \quad y(x) \sim (x-1), \tag{5}$$

når $x \to 1$.

iii. Siden $x = \infty$ er et regulært singulært punkt antar vi at $y(x) \sim x^{-\nu}$ når $x \to \infty$. Dette fører til indicieligningen

$$\nu(\nu + 1) - \nu = \nu^2 = 0,$$

med løsning $\nu = 0$ (dobbeltrot). Altså vil

$$y(x) \sim 1, \quad \text{eller} \quad y(x) \sim \log x, \tag{6}$$

når $x \to \infty$.

Kommentar: Ligning (2) er Bessel-ligningen (av orden 0), så den generelle løsningen til (1) er

$$y(x) = c_1 J_0(x^{-1}) + c_2 Y_0(x^{-1}),$$

med asymptotiske oppførsler slik vi har funnet over.

2. (a) Integralet var

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} \equiv \int_0^\infty dt\, e^{\varphi(t)}. \tag{7}$$

i. Integranden har et bevegelig maksimum t_m, der

$$\varphi'(t_m) = \frac{n}{t_m} - 1 = 0,$$

dvs. $t_m = n$. Videre er

$$\varphi''(t_m) = -\frac{n}{t_m^2} = -\frac{1}{n},$$

slik at sadelpunktmetoden gir

$$\begin{aligned} n! &\approx e^{\varphi(t_m)} \int_{-\infty}^\infty du \exp\left\{\frac{1}{2}\varphi''(t_m)u^2\right\} = \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_m)}}\, e^{\varphi(t_m)} \\ &= \sqrt{2\pi n}\, e^{n \log n - n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Her faller den opprinnelige integrasjonsveien sammen med 'steepest decent'-veien, slik at vi ikke trenger å bekymre oss om deformasjon av integrasjonvei.

ii. Vi kan gjenta den samme prosedyren når $n \to i\nu = e^{i\pi/2}\nu$ ($\nu \to \infty$). Dersom integrasjonsveien kan deformeres til å gå gjennom sadelpunktet på en 'steepest decent' vei må vi få (ved å substituere $n \to e^{i\pi/2}\nu$ i ligning (8))

$$\Gamma(1 + i\nu) \approx \sqrt{2\pi\nu} e^{-(\pi\nu/2)}\, e^{i(\nu \log \nu - \nu + \pi/4)}. \tag{9}$$

Det gjenstår å finne 'steepest decent' veien, og å verifisere at deformasjonen er mulig. Vi går først til polarkoordinater, $t = \rho e^{i\phi}$. I sadelpunktet, $t_m = \nu e^{i\pi/4}$, er $\Im\varphi = \nu \log \nu - \nu$. 'Steepest descent' veien, som må tilfredsstille ligningen

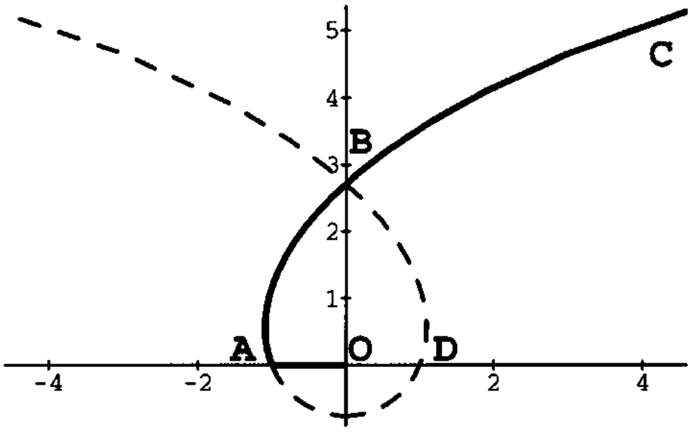
$$\Im\varphi(t) = \nu \log \rho - \rho \sin \phi = \nu \log \nu - \nu, \tag{10}$$

kan parametriseres som

$$\sin \phi = -e\xi \log \xi, \tag{11}$$

der $\xi = \nu/e\rho$. Analyse nær sadelpunktet viser at 'steepest descent' veien krysser den imaginære aksen under vinkel $\pi/4$, og at vi har en 'steepest ascent' vei som krysser den imaginære aksen under vinkel $-\pi/4$. Vi ser videre at $\sin \phi = 0$ (dvs. $\phi = 0, \pi$) for $\xi = 1$ og for $\xi \to \infty$. 'Steepest descent' veien vil derfor ikke fjerne seg uakseptabel mye fra positiv reell akse for store ρ (dvs. små ξ). Den krysser negativ

reell akse i punktet $t = -\nu/e$. For å deformere den opprinnelige integrasjonsveien over i 'steepest decent' veien må vi derfor addere et integral fra $t = 0$ til $t = -\nu/e$ (med en liten positiv imaginærdel). Men på denne veien er integranden $e^{\varphi(t)} \leq e^{-\nu(\pi - e^{-1})}$, som er eksponensielt lite i forhold til verdien i sadelpunktet ($|e^{\varphi(t_m)}| = e^{-\nu\pi/2}$), slik at bidraget til integralet fra dette intervallet er subdominant og kan neglisjeres. Resultatet (9) er derfor korrekt.
En nøyaktig figur av løsningen til (10) er som følger:



Her er den deformerte integrasjonsveien lik kurven

$$O \equiv (0,0) \rightarrow A \equiv (-\nu/e, \varepsilon) \rightarrow B \equiv (0, \nu) \rightarrow C \equiv (\infty, \infty),$$

med sadelpunktet i B.

Kommentar: Steepest ascent veien, $(B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B)$ er som hentet fra en Escher'sk verden: Vi går stadig i motbakke, men ender likevel tilbake ved utgangspunktet. Årsaken er at $\Re\varphi$ ikke er en entydig definert funksjon, men øker med $2\pi\nu$ når vi foretar rundturen $(B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B)$.

(b) i. Vi har

$$\begin{aligned} I(N) &= \int_0^\infty dt\, e^{-(t+N)^2} = e^{-N^2} \int_0^\infty dt\, e^{-2Nt}\, e^{-t^2} \\ &= \frac{1}{2N} e^{-N^2} \int_0^\infty du\, e^{-u}\, e^{-u^2/4N^2} \\ &= \frac{1}{2N} e^{-N^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2N}\right)^{2k} (2k)!. \end{aligned} \tag{12}$$

ii. Vi bør ta med ledd i rekken $\sum_k a_k$ til koeffisientene a_k begynner å vokse igjen, dvs. til

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+1)(2k+1)}{k+1} \frac{1}{4N^2} = 1,$$

slik at

$$k_{opt} \approx N^2. \tag{13}$$

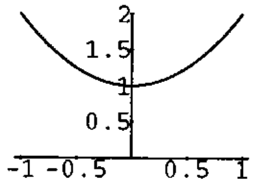
iii. Den oppnåelige nøyaktigheten kan forventes å være av samme størrelsesorden som det siste leddet vi tok med, dvs. omtrent lik

$$\begin{aligned} a_{k_o} &\approx \frac{1}{2N} e^{-N^2} \sqrt{2} e^{-[k_o \log k_o + (1 + \log 4) k_o]} \\ &= \frac{1}{N} e^{-N^2 [\log(4N^2) + 2]}. \end{aligned} \tag{14}$$

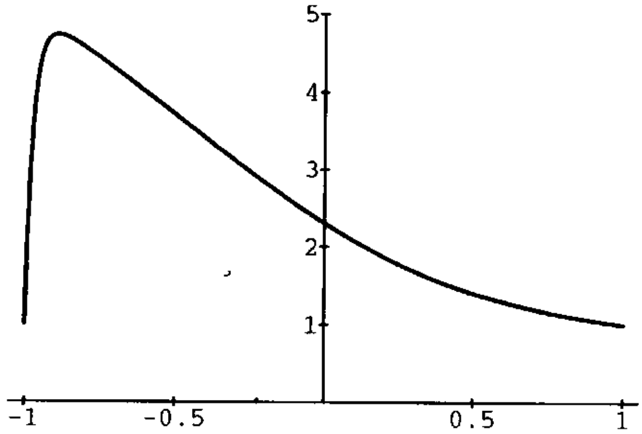
3. I denne oppgaven skulle vi gi en kvalitativ analyse av randverdiproblemet

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + y(x) = 0, \quad \text{y(-1)=y(1)=1}.$$

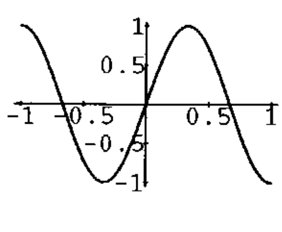
(a) Med $a(x) = 1 + x^2$, som i figuren under



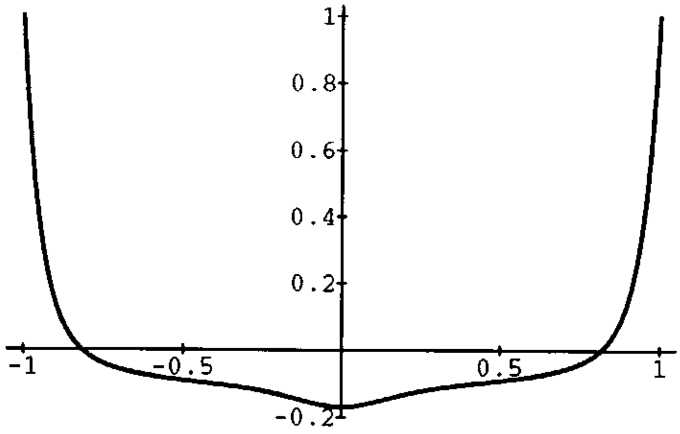
får vi etter de generelle reglene et grensesjiikt av tykkelse ε ved $x = -1$. (Siden $a(x) \neq 0$ i det aktuelle intervallet $(-1, 1)$ kan vi ikke ha indre grensesjikt. Siden videre $a(x) > 0$ er det bare konsistent å ha grensesjiktet ved venstre rand.) Vi kan teste denne konklusjonen mot numerisk løsning av problemet, som i figuren under:



(b) Med $a(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$, som i figuren under

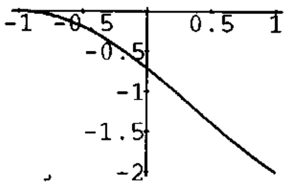


får vi etter de generelle reglene grensesjikt av tykkelse ε ved $x = -1$ og $x = -1$, med $y(x) \approx 0$ inne i intervallet $(-1, 1)$. (Siden $a(-1) > 0$ og $a(1) < 0$ er begge rendene tillatte posisjoner for grensesjiikt av tykkele ε. Siden $a(0) = 0$, med $a'(0) > 0$, er dette en tillatt posisjon for et indre grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$. Men siden $a(\pm\frac{2}{3}) = 0$, med $a'(\pm\frac{2}{3}) < 0$ vil vi få en indre løsninger som vokser eksponensielt når $\varepsilon \to 0$,— dersom ikke $y(\pm\frac{2}{3}) \approx 0$.) Vi kan teste denne konklusjonen mot en numerisk løsning av problemet, som i figuren på neste side:



Som vi ser overlever en viss struktur i løsningen ved det indre nullpunktet $x = 0$ for $a(x)$.

(c) Med $a(x) = -(1+x)\sin[\frac{\pi}{4}(1+x)]$, som i figuren under



kan vi etter de generelle reglene ha et grensesjikt av tykkelse ε ved $x = 1$. Punktet $x = -1$ må analyseres videre, siden $a(x)$ har en dobbeltrot der. Den ytre ligningen blir nær $x = -1$

$$y'(x) \approx \frac{4}{\pi}\frac{1}{(x+1)^2}y(x), \tag{15}$$

med løsning

$$y(x) \sim C\exp\left(-\frac{4}{\pi}\frac{1}{x+1}\right) \to 0 \text{ når } x \to -1^+. \tag{16}$$

Det er derfor ikke mulig å oppfylle venstre randbetingelse med den ytre løsningen alene, så vi må ha en form for grensesjikt ved $x = -1$ også. For å analysere oppførselen her innfører vi indre variable

$$X = (x+1)/\delta, \quad Y(X) = y(x+1),$$

og finner vi til ledende orden ved $x = -1$:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}Y''(X) + \delta X^2 Y'(X) + Y(X) = 0. \tag{17}$$

Vi finner at dominerende balanse kan opptre mellom første og tredje ledd i denne ligningen, med $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Dette gir en indre løsning av formen

$$Y(X) = \cos X + C\sin X, \tag{18}$$

som altså ikke svarer til et grensesjikt av konvensjonell type, men i stedet er av 'WKB-type'. For å finne tykkelsen på oscillasjons-området transformerer vi ligningen til standard WKB form (nær $x = -1$)

$$\epsilon^2 f''(x) + Q(x)f(x) = 0,$$

ved å innføre

$$y(x) = \exp\left[\frac{\pi}{24\varepsilon}(x+1)^2\right] f(x).$$

Det gir

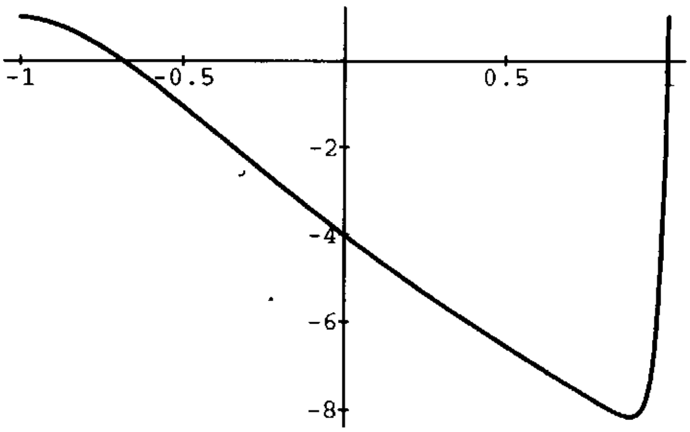
$$\varepsilon f'' + \left[1 - \frac{\pi^2}{32\varepsilon}(x+1)^2 + \cdots\right] f = 0. \tag{19}$$

Overgangen fra oscillerende til exponensiell oppførsel skjer altså ved vendepunktet ($Q(x) = 0$)

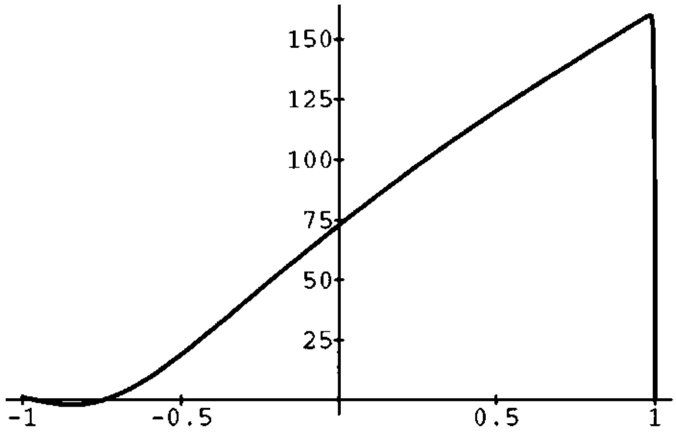
$$x + 1 = \frac{4}{\pi}\sqrt{2\varepsilon}. \tag{20}$$

Løsningen har altså et oscillerende grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x = -1$. Til høyre for dette grensesjiktet vil løsningen generelt vokse eksponensielt med ε^{-1}.

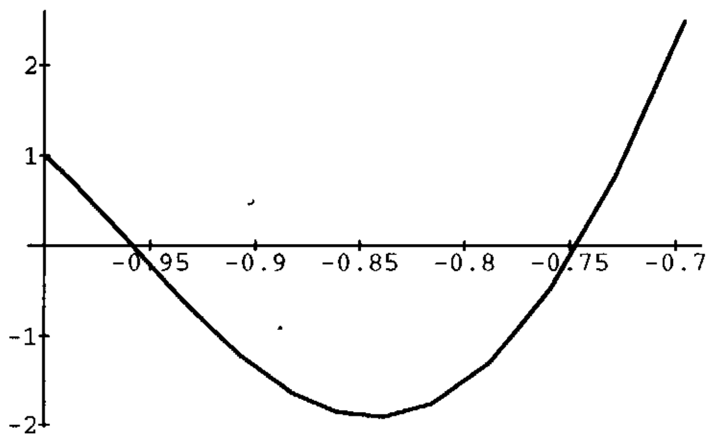
Det er en stor numerisk utfordring å teste disse konklusjonene mot numerisk løsning av problemet, men et begynnende mønster kommer til syne ettersom vi minsker ε. For $\varepsilon = 0.05$ blir løsningen som i figuren under:



Det oscillerende grensesjiktet er ikke spesielt tydelig over, siden det høyst kan sies å inneholde en halv oscillasjon. For $\varepsilon = 0.001$ blir den numeriske løsningen som i figuren på neste side:



Selv om ikke oscillasjoner er det mest prominente trekk ved denne figuren heller, ser vi indikasjoner på at det er i ferd med å utvikle seg en struktur nær $x = -1$. Når vi bare fokuserer oppmerksomheten på dette området finner vi omtrent én oscillasjon:



4. Ligningen var

$$\ddot{y} + e^{\varepsilon t} y = 0, \text{ med } y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0. \tag{21}$$

Ved å gjøre substitusjonen $\tau = \varepsilon t$, $Y(\tau) = y(t)$ fås ligningen

$$\varepsilon^2 \ddot{Y} + e^{\tau} Y = 0,$$

som er på naturlig form for WKB-approksimasjonen. Vi skriver partikulærløsninger på formen

$$f(\tau) = e^{S(\tau)/\varepsilon},$$

og finner ligningen

$$\dot{S}^2 + e^{\tau} = -\varepsilon \ddot{S}$$

Vi skriver $S = S_0 + \varepsilon S_1 + \cdots$ og finner

$$\dot{S}_0 = \pm i e^{\tau/2}, \quad \dot{S}_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \dot{S}_0 = -\frac{1}{4},$$

slik at to partikulær-løsninger er

$$f_{\pm}(\tau) \approx e^{-\tau/4} \exp\left[\pm i \frac{2}{\varepsilon}(e^{\tau/2} - 1)\right].$$

Løsningen på (21) er en lineærkombinasjon av disse. Ved å ta hensyn til startbetingelsene finner vi

$$Y(\tau) = e^{-\tau/4} \cos\left[\frac{2}{\varepsilon}(e^{\tau/2} - 1)\right] + O(\varepsilon). \tag{22}$$

Kommentar: Substitusjonen

$$z = \frac{2}{\varepsilon} e^{\varepsilon t/2}$$

transformerer ligning (21) til Bessel-ligningen

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1\right] y(z) = 0,$$

slik at den eksakte løsningen kan uttrykkes ved Bessel-funksjoner

$$y(t) = \frac{Y_0'(\frac{2}{\varepsilon})J_0(\frac{2}{\varepsilon}e^{\varepsilon t/2}) - J_0'(\frac{2}{\varepsilon})Y_0(\frac{2}{\varepsilon}e^{\varepsilon t/2})}{Y_0'(\frac{2}{\varepsilon})J_0(\frac{2}{\varepsilon}) - J_0'(\frac{2}{\varepsilon})Y_0(\frac{2}{\varepsilon})}. \tag{23}$$

Ved å sette inn de asymptotiske utviklingene for $J_0(x)$ og $Y_0(x)$ for store x,

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right\},$$

$$Y_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right\},$$

$$J_0'(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right\},$$

$$Y_0'(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right\},$$

i ligning (23), gjenfinner man løsningen (22).