Fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 19.12.1992

1. (a) Gitt en differensialligning

$$\left[\frac{d^n}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + p_0(z)\right] f(z) \equiv (\mathcal{L}f)(z) = 0, \tag{1}$$

der z kan ta verdi overalt på tallkula:

(i) Et punkt z_0 sies å være et ordinært punkt for (1) hvis og bare hvis alle $p_k(z)$, $k = 0, \ldots, n-1$ er analytiske i en omegn om z_0.

(ii) Et punkt z_0 sies å være et regulært singulært punkt for (1) dersom det ikke er et ordinært punkt, men alle $r_k(z) \equiv (z-z_0)^k p_{n-k}(z)$, $k = 1, \ldots, n$ er analytiske (mer presist, kan utvides til analytiske funksjoner ved å definere $r_k(z_0) = \lim_{z\to z_0} r_k(z)$) i en omegn om z_0.

(iii) Et punkt z_0 sies å være et irrregulært singulært punkt for (1) dersom det verken er et ordinært punkt eller et regulært singulært punkt.

(iv) Et irregulært singulært punkt kan tenkes å ha oppstått ved at flere (m) regulære singulære punkter faller sammen (*konfluens* av singulariteter), f.eks. dersom

$$p_{n-1}(z) = \frac{1}{z^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{z^2-\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\left(\frac{1}{z-\epsilon} - \frac{1}{z+\epsilon}\right)$$

Det singulære punktet sies da å ha *rang* m. Alle regulære singulære punkter er altså av rang 1.

(b) Mulige eksempler:

(i) *2nd* ordens differensialligning med nøyaktig ett regulært singulært punkt (i $z = \infty$):

$$y''(z) = 0. \tag{2}$$

(ii) *2nd* ordens differensialligning med nøyaktig to regulære singulære punkter (i $z = 0$ og $z = \infty$):

$$z^2\, y''(z) + \alpha\, z\, y'(z) + \beta\, y(z) = 0, \qquad \text{med } \alpha \neq 0 \text{ og/eller } \beta \neq 0. \tag{3}$$

Kommentar:
Merk at en *løsningene* til ligning (3) ikke trenger å være singulære i både $z = 0$ og $z = \infty$. F.eks. kan begge indeksene i $z = 0$ være ulike ikke-negative heltall.

Kommentar:
Den generelle analysen, som ikke kreves i eksamensbesvarelsen, er som følger:

(i) Det regulære singulære punktet kan ved en Möbius transformasjon avbildes til $z = 0$. Anta at dette har blitt gjort. Ligningen må da ha formen

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{a_1}{z} + a_2 + \cdots\right)\frac{d}{dz} + \left(\frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z} + \cdots\right)\right] y(z) = 0, \tag{4}$$

for at $z = 0$ skal være et regulært singulært punkt. For å studere oppførselen nær $z = \infty$ innfører vi $u = 1/z$, $Y(u) = y(z)$, dvs.

$$\frac{d}{dz} = -u^2\frac{d}{du}, \quad \frac{d^2}{dz^2} = u^4\frac{d^2}{du^2} + 2u^3\frac{d}{du},$$

og finner

$$\left[\frac{d^2}{du^2}+\left(\frac{2-a_1}{u}-\frac{a_2}{u^2}-\cdots\right)\frac{d}{du}+\left(\frac{b_1}{u^2}+\frac{b_2}{u^3}+\cdots\right)\right]Y(u)=0. \tag{5}$$

For at $u=0$ skal være et ordinært punkt må $a_1=2$, $a_2=b_2=\cdots=0$, slik at ligningen blir

$$Y''=0, \tag{6}$$

med generell løsning

$$Y(u)=c_1+c_2\,u. \tag{7}$$

Vi kan nå transformere singulariteten til en generell posisjon w_0 ved transformasjonen

$$w=z+w_0,\quad \text{dersom } w_0\neq\infty, \text{ og }\quad w=\frac{1}{z}\quad \text{dersom } w_0=\infty.$$

Ligningen blir da

$$\left(\frac{d^2}{dw^2}+\frac{2}{w-w_0}\frac{d}{dw}\right)y(w)=0. \tag{8}$$

(ii) De to singularitetene kan ved en Möbius-transformasjon avbildes på $z=0$, og $z=\infty$, så vi kan først anta at dette er tilfellet. Ligningen må igjen ha formen

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{a_1}{z}+a_2+\cdots\right)\frac{d}{dz}+\left(\frac{b_1}{z^2}+\frac{b_2}{z}+\cdots\right)\right]y(z)=0, \tag{9}$$

for at $z=0$ skal være et regulært singulært punkt. Og, med $u=1/z$,

$$\left[\frac{d^2}{du^2}+\left(\frac{2-a_1}{u}-\frac{a_2}{u^2}-\cdots\right)\frac{d}{du}+\left(\frac{b_1}{u^2}+\frac{b_2}{u^3}+\cdots\right)\right]Y(u)=0. \tag{10}$$

For at $u=0$ skal være et regulært singulært punkt må $a_2=b_2=\cdots=0$, slik at ligningen blir *Eulers ligning*

$$y''+\frac{1-\nu_1-\nu_2}{z}y'+\frac{\nu_1\nu_2}{z^2}y=0, \tag{11}$$

med generell løsning

$$\begin{aligned} y(z) &= c_1z^{\nu_1}+c_2z^{\nu_2},\quad \nu_1\neq\nu_2\\ y(z) &= (c_1+c_2\ln z)z^{\nu},\quad \nu_1=\nu_2=\nu. \end{aligned} \tag{12}$$

Vi kan nå avbilde singularitetene til generelle posisjoner w_0, w_1 ved Möbius-transformasjonen

$$w=\frac{w_1z-\lambda w_0}{z-\lambda},\quad z=\lambda\frac{w-w_0}{w-w_1}. \tag{13}$$

(Her er $\lambda\neq 0$ en fri parameter som faller ut av alle uttrykk.) Vi finner da den generelle annen ordens ligningen med to regulære singulære punkter:

$$\left[\frac{d^2}{dw^2}+\left(\frac{1+\nu_1+\nu_2}{w-w_1}+\frac{1-\nu_1-\nu_2}{w-w_0}\right)\frac{d}{dw}+\frac{\nu_1\nu_2(w_1-w_0)^2}{(w-w_1)^2(w-w_0)^2}\right]y(w)=0, \tag{14}$$

med løsninger

$$\begin{aligned} y(w) &= c_1\left(\frac{w-w_0}{w-w_1}\right)^{\nu_1}+c_2\left(\frac{w-w_0}{w-w_1}\right)^{\nu_2},\quad \nu_1\neq\nu_2,\\ y(w) &= \left[c_1+c_2\ln\left(\frac{w-w_0}{w-w_1}\right)\right]\left(\frac{w-w_0}{w-w_1}\right)^{\nu},\quad \nu_1=\nu_2=\nu. \end{aligned} \tag{15}$$

(c) Differensialligningen

$$y''(x)+a\,y'(x)-\mathrm{e}^{x}\,y(x)=0 \tag{16}$$

har et irregulært singulært punkt av uendelig rang i $x=\infty$, og ingen andre singulære punkter.

(d) (i) Når $x\to+\infty$ skriver vi

$$y(x)=\mathrm{e}^{S(x)} \tag{17}$$

med

$$S(x)=S_0(x)+S_1(x)+\cdots$$

Innsatt i ligning (16) gir dette

$$\left[(S')^2+S''+a\,S'\right]=\left[(S_0')^2+(2\,S_0'\,S_1'+S_0''+a\,S_0')+\cdots\right]=\mathrm{e}^{x},$$

med løsning

$$S_0' = \pm e^{x/2}, \tag{18}$$
$$S_1' = -\frac{1}{4}(1+2a). \tag{19}$$

Integrert og innsatt i (17) gir dette

$$y(x) \sim C \exp\left(\pm 2e^{x/2} - \frac{1}{4}(1+2a)x\right) \quad \text{når } x \to +\infty, \tag{20}$$

der C er en konstant.

(ii) Når $x \to -\infty$ vil e^x-leddet i ligning (16) bli neglisjerbart lite, slik at ligningen forenkles til

$$y''(x) + a\,y'(x) = 0.$$

Denne har generell løsning $y(x) = C_1 + C_2\,e^{-ax}$. Altså:

$$y(x) \sim C_1 + C_2\,e^{-ax} \quad \text{når } x \to -\infty, \tag{21}$$

der C_1 og C_2 er konstanter.

(e) Den mest iøynefallende substitusjonen er kanskje å innføre

$$u = e^x, \quad y(x) = Y(u), \tag{22}$$

men der er også andre muligheter som fører til like enkle ligninger, som f.eks. $u = e^{-x}$ eller $u = e^{\pm x/2}$. Regner (foreløbig) bare videre med substitusjonen (22), som gir

$$\frac{d}{dx} = u\,\frac{d}{du}$$
$$\frac{d^2}{dx^2} = u^2\,\frac{d^2}{du^2} + u\,\frac{d}{du}.$$

Innsatt og ordnet leder dette til ligningen

$$\left(\frac{d^2}{du^2} + \frac{1+a}{u}\,\frac{d}{du} - \frac{1}{u}\right) Y(u) = 0, \tag{23}$$

som kan sees å ha et regulært singulært punkt i $u = 0$ og et rang 2 irregulært singulært punkt i $u = \infty$ (og ingen andre singulære punkter).

Kommentar:

I forelesningene har vi sagt at ligninger med samme singularitetsstruktur som (23) er ekvivalent med den konfluent hypergeometriske ligningen (Wittakers ligning). Men ligning (23) er egentlig et degenerert grensetilfelle av denne, ekvivalent med Besselligningen. Dette kan sees direkte hvis man i stedet for (22) gjør substitusjonen

$$u = 2\,e^{x/2}, \quad y(x) = u^{-a}\,Y(u). \tag{24}$$

Innsatt og ordnet leder dette til den modifiserte Bessel-ligningen,

$$Y''(u) + \frac{1}{u}\,Y'(u) - \left(1 + \frac{a^2}{u^2}\right) Y(u) = 0, \tag{25}$$

med generell løsning $Y(u) = C_1\,I_a(u) + C_2\,K_a(u)$.

2.

I denne oppgaven skulle vi analysere integralet

$$I(z,a) = \int_0^\infty dt\,e^{-zt}\left(\frac{t}{1+t}\right)^a, \tag{26}$$

i forskjellige grenser for a og z.

(a) Når $z \to +\infty$ innfører vi ny integrasjonsvariabel $u = tz$, og får

$$\begin{aligned} I(z,a) = & \quad z^{-(1+a)} \int_0^\infty du\, \mathrm{e}^{-u} \left(\frac{u}{1+u/z}\right)^a \sim z^{-(1+a)} \int_0^\infty du\, \mathrm{e}^{-u}\, u^a \\ = & \quad z^{-(1+a)}\, \Gamma(1+a). \end{aligned} \tag{27}$$

(b) Når $a \to \infty$ innfører vi

$$\phi(t) \equiv a \log\left(t/(1+t)\right) - z\,t \tag{28}$$

og anvender sadelpunktmetoden på integralet

$$I(z,a) = \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{\phi(t)}.$$

Vi har et (bevegelig) maksimum t_0 gitt av ligningen

$$\phi'(t_0) = \frac{a}{t_0} - \frac{a}{1+t_0} - z = \frac{a}{t_0\,(1+t_0)} - z = 0,$$

med (tilnærmet) løsning

$$t_0 = \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\tau^{-1} + \cdots \quad \text{der} \quad \tau = \sqrt{\frac{a}{z}}. \tag{29}$$

Vi finner videre

$$\phi''(t_0) = -\frac{a\,(1+2t_0)}{t_0^2\,(1+t_0)^2} \approx -\frac{2\tau z^2}{a} = -\frac{2\,z}{\tau},$$

og derav

$$\begin{aligned} I(z,a) &\approx \mathrm{e}^{\phi(t_0)} \int_{-\infty}^\infty du\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\phi''(t_0)\,u^2} \\ &= \mathrm{e}^{\phi(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(t_0)}} \approx \mathrm{e}^{-(\tau-\frac{1}{2})z}\, \mathrm{e}^{-a\tau^{-1}} \sqrt{\frac{\pi\tau}{z}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Her har vi satt inn for

$$\phi(t_0) = -z\,t_0 + a \log\left(t_0/(1+t_0)\right) = -(\tau - \frac{1}{2})z - a\,\tau^{-1} + \cdots$$

(der de utelatte leddene forsvinner når $a \to \infty$).

(c)

Når $z \to 0^+$ innfører vi ny integrasjonsvariabel $u = tz$, og analyserer først

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} I(z,a) &= -\frac{1}{z^2} \int_0^\infty du\, \mathrm{e}^{-u}\, u \left(\frac{u}{u+z}\right)^a \\ &= -\frac{1}{z^2} \int_0^\infty du\, \mathrm{e}^{-u}\, (u - a\,z + \cdots) = -\frac{1}{z^2} + \frac{a}{z} + \cdots \end{aligned}$$

Integrert med hensyn på z gir dette at

$$I(z,a) \sim \frac{1}{z} + a \log z + \cdots \tag{31}$$

når $z \to 0^+$.

(d) En funksjon f sies å ha en asymptotisk potensrekke,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n, \tag{32}$$

om $x = 0$ dersom

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_0^N f_n\, x^n}{x^N} = 0 \tag{33}$$

for all N.

Den hender ofte at absoluttverdien av leddene $f_n\, x^n$ i den asymptotiske potensrekken (32) er avtagende opp til en viss verdi $n = N(x)$, og deretter begynner å vokse igjen. Den optimale trunkeringsregelen (som ikke kan begrunnes matematisk som generell regel) sier at det da ikke lønner seg å summere rekken lenger enn til det $N-1$'te leddet (eventuelt kan man ta med halvparten av det N'te leddet).

(e) Ved å bytte om integrasjons- og summasjons-rekkefølge finner vi

$$I(z,2) = \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt} \left(\frac{t}{1+t}\right)^2 = \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n\, (n+1)\, t^{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n\, (n+1) \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt}\, t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n\, (n+1)\,(n+2)!\, z^{-(n+3)}. \tag{34}$$

Forholdet mellom to påfølgende ledd s_n i rekken (34) er

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = -\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n+3}{z}$$

slik at absoluttverdien av leddene begynner å vokse igjen når $n+3 > \frac{n+1}{n+2}\, z \approx z$. Uten spesielle resummasjonsteknikker lønner det seg derfor ikke å summere lengere enn til og med ledd nummer

$$n = n_{opt} = [z] - 4. \tag{35}$$

3. (a) Grensesjiktmetoden er en perturbativ metode til å løse differensialligninger (ofte randverdiproblemer for ordinære eller partielle differensialligninger av annen orden) der leddene av høyest orden i de deriverte er multiplisert med en liten parameter ε. I dette såkalte ytre området kan man derfor tilnærme ligningen med en ligning av lavere orden (den ytre ligningen). Men man vil da ha for mange randbetingelser (eventuelt startbetingelser) i forhold til ordenen til ytre ligningen. For å kunne oppfylle randbetingelsene vil løsningen som regel måtte utvikle et tynt grensesjikt (et indre område) der man må ta hensyn til leddene av høyest orden i de deriverte, men der man istedet vil kunne gjøre andre forenklinger fordi grensesjiktet er tynt.

For en *2nd* ordens ordinær differensialligning av generell form

$$\varepsilon\, y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0, \tag{36}$$

vil x være den ytre (uavhengige) variable, og den ytre løsningen tilfredsstille ligningen

$$a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0.$$

Dersom løsningen har et grensesjikt ved $x = x_0$ er den indre (avhengige) variable av formen

$$X = \frac{x - x_0}{\delta(\varepsilon)},$$

der $\delta \to 0$ når $\varepsilon \to 0$. Denne substitusjonen innsatt i (36) gir en ligning som tilfredsstilles av den indre løsningen.

(b) Sammenligner vi randverdiproblemet

$$\varepsilon\, y''(x) - x^3\, y'(x) - y(x) = 0, \tag{37}$$

$$y(1) = y(-1) = 1, \quad \text{der } \varepsilon \to 0^+ \tag{38}$$

med den generelle klassen (36), så har vi her

$$a(1) < 0, \quad \text{og} \quad a(-1) > 0,$$

slik at vi vil ha grensesjikt av tykkelse ε ved $x = -1$ og $x = +1$.

(c) (i) Vi innfører indre variable

$$X_- = \frac{x+1}{\varepsilon}, \quad y(x) = Y_-(X_-) \quad \text{ved } x = -1,$$

$$X_+ = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad y(x) = Y_+(X_+) \quad \text{ved } x = +1. \tag{39}$$

I begge tilfelle blir den indre ligningen (til ledende orden i ε)

$$Y''_\pm(X_\pm) + Y'_\pm(X_\pm) = 0,$$

med løsninger

$$Y_\pm(X_\pm) = C_0 + C_1\, \mathrm{e}^{-X_\pm}, \quad \text{der } C_0 + C_1 = 1. \tag{40}$$

(ii) Den ytre ligningen blir

$$x^3\, y'(x) + y(x) = 0,$$

med generell løsning

$$y_{ytre}(x) = c\, \mathrm{e}^{1/2x^2}. \tag{41}$$

Denne løsningen er regulær i $x = 0$ bare dersom

$$c = 0, \tag{42}$$

Matching mot de indre løsningene medfører da at

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 1. \tag{43}$$

(iii) Vi kan skrive den uniforme tilnærmelsen som

$$y_{unif}(x) = Y_-(X_-) + Y_+(X_+) = 2\, \mathrm{e}^{-1/\varepsilon} \cosh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{44}$$

(d)

Sammenligner vi randverdiproblemet

$$\varepsilon\, y''(x) + x^3\, y'(x) - y(x) = 0, \tag{45}$$

$$y(1) = y(-1) = 1, \quad \text{der } \varepsilon \to 0^+ \tag{46}$$

med den generelle klassen (36), så har vi her

$$a(-1) < 0, \quad a(0) = 0 \quad \text{og} \quad a(1) > 0,$$

slik at grensesjiktet må være ved $x = 0$. For å bestemme tykkelsen på grensesjiktet innfører vi indre variabel

$$X = \frac{x}{\delta}, \quad y(x) = Y(X), \tag{47}$$

der $\delta = \delta(\varepsilon)$ er foreløbig er ukjent. Den indre ligningen blir

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\, Y''(X) + \delta^2\, X^3\, Y'(X) - Y(X) = 0.$$

Vi bruker metoden med dominerende balanse for å analysere denne. Resultatet er at den konsistente balansen er mellom første og siste ledd i ligningen, med $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.
Vi finner derfor et grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x = 0$.

(e) (i) Den indre ligningen blir (til ledende orden i ε)

$$Y''(X) - Y(X) = 0,$$

med løsning

$$Y(X) = C\,\cosh(X), \tag{48}$$

når man tar i betraktning at løsningen må være symmetrisk under $X \to -X$.

(ii) Den ytre ligningen blir

$$x^3\,y'(x) - y(x) = 0, \quad y(\pm 1) = 1,$$

med løsning

$$y_{ytre}(x) = \mathrm{e}^{1/2}\,\mathrm{e}^{-1/2x^2}. \tag{49}$$

Matching til den indre løsningen impliserer nå at

$$C = 0. \tag{50}$$

(iii) Siden den indre løsningen forsvinner vil den ytre og den uniforme løsningen falle sammen:

$$y_{unif}(x) = \mathrm{e}^{1/2}\,\mathrm{e}^{-1/2x^2}. \tag{51}$$

Kommentarer:
I begge tilfellene i denne oppgaven fant vi en løsning $y(x)$ slik at

$$y(0) = 0,$$

opp til korreksjoner som er eksponensielt små når $\varepsilon \to 0^+$. Med den løsningsmetoden som vi har brukt her kan man ikke bestemme $y(0)$ mer nøyaktig. Hvis man istedet bruker WKB-metoden kan man komme noe videre. Vi skriver

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{S(x)},$$

med

$$S(x) = S_0(x) + \cdots,$$

og finner

$$S_0(x) = \int_0^x dy\,\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{y^6}{4\varepsilon^2}} \pm \frac{y^3}{2\varepsilon}\right) \tag{52}$$

og derav at

$$\log y(0) \sim \begin{cases} -\frac{1}{4\varepsilon} + \cdots & \text{i underoppgave } \mathbf{b} \\ -K_d\,\varepsilon^{-1/6} + \cdots & \text{i underoppgave } \mathbf{d}. \end{cases} \tag{53}$$

Her er

$$K_d = 2^{1/3}\int_0^\infty dz\,\left[\sqrt{1+z^6} - z^3\right] = \frac{3}{4}\,2^{1/3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\,\Gamma(\tfrac{7}{6}).$$

4. (a) WKB-approksimasjonen er en global tilnærmingsmetode som kan anvendes på linære differensialligninger der leddet med den høyeste deriverte er multiplisert med en liten parameter ε. Den omfatter grensesjikt-metoden (for linære differensialligninger) som et spesialtilfelle. Den kan f.eks. anvendes på kvantemekanikiske problemstillinger, der $\hbar$ er å regne for den lille parameteren, for å løse egenverdiproblemer og tunnelleringsproblemer.

(b) Vi skulle analysere startverdiproblemet

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + 2\frac{d}{dt}f(t) = \mathrm{e}^{\varepsilon t}\,f(t), \tag{54}$$

$$f(0) = 1, \qquad \frac{df}{dt}(0) = 0. \tag{55}$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

Ved å innføre substitusjonen

$$u = \varepsilon t, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-t}\, F(u), \tag{56}$$

får man

$$\varepsilon^2\, F''(u) = (\mathrm{e}^u + 1)\, F(u), \tag{57}$$

som er på standard "WKB-form".

(c)

Vi innfører

$$F(u) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} S_0 + S_1 + \cdots\right)$$

og får ligningen

$$\left[(S_0')^2 + \varepsilon\,(2S_0'\,S_1' + S_0'') + \cdots\right] = \left(1 + \mathrm{e}^u\right).$$

Denne har løsninger

$$\begin{aligned} S_0' &= \pm\sqrt{1 + \mathrm{e}^u} \\ \frac{d}{du} S_1 &= -\frac{1}{4}\frac{d}{du}\log\left(1 + \mathrm{e}^u\right), \end{aligned}$$

slik at vi får partikulærløsninger

$$y_\pm(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(1 + \mathrm{e}^{\varepsilon t}\right)^{-1/4} \exp\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} dv\,\sqrt{1 + \mathrm{e}^v}\right). \tag{58}$$

Kommentar:
Hvis vi istedet hadde gjort substitusjonen

$$u = \varepsilon t, \quad f(t) = G(u),$$

ville vi fått ligningen

$$\varepsilon^2\, G''(u) + 2\varepsilon\, G'(u) = \mathrm{e}^u\, G(u).$$

Den eksponensielle substitusjonen, $G(u) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} S_0 + S_1 + \cdots\right)$, gir da ligningen

$$\left\{\left[(S_0')^2 + 2\, S_0' - \mathrm{e}^u\right] + \varepsilon\left[2(S_0' + 1)S_1' + S_0''\right]\right\}$$

med løsninger

$$\begin{aligned} S_0' &= -1 \pm \sqrt{1 + \mathrm{e}^u}, \\ \frac{d}{du} S_1 &= -\frac{1}{2}\,\frac{S_0''}{S_0' + 1} = -\frac{1}{4}\,\frac{d}{du}\,\log\left(1 + \mathrm{e}^u\right). \end{aligned}$$

Dette reproduserer igjen løsningene (58).

(d) Beregner først startverdiene til løsningene (58). Til orden ε^0:

$$\begin{aligned} y_+(0) &= 2^{-1/4}, \qquad y_+'(0) = 2^{1/4} - 2^{-1/4} \\ y_-(0) &= 2^{-1/4}, \qquad y_-'(0) = -2^{1/4} - 2^{-1/4}. \end{aligned} \tag{59}$$

(e) Løsningen på startverdiproblemet må ha formen $y(t) = C_+\, y_+(t) + C_-\, y_-(t)$, der

$$\begin{aligned} (C_+ + C_-)\; 2^{-1/4} &= 1, \\ -\,(C_+ + C_-)\; 2^{-1/4} + (C_+ - C_-)\; 2^{1/4} &= 0, \end{aligned}$$

med løsning

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{2}\left(2^{1/4} + 2^{-1/4}\right), \\ C_- &= \frac{1}{2}\left(2^{1/4} - 2^{-1/4}\right). \end{aligned}$$

Den søkte løsningen er altså til ledende orden i ε:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} \left\{ \left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{\varepsilon t}} \right)^{1/4} \cosh\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} dv\, \sqrt{1+\mathrm{e}^v} \right) + \left(\frac{1}{2\,(1+\mathrm{e}^{\varepsilon t})} \right)^{1/4} \sinh\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} dv\, \sqrt{1+\mathrm{e}^v} \right) \right\} \tag{60}$$

For $\varepsilon t \gg 1$ kan vi gjøre tilnærmelsen

$$I \equiv \int_0^{\varepsilon t} dv\, \sqrt{1+\mathrm{e}^v} \approx \int_0^{\varepsilon t} dv\, \mathrm{e}^{v/2} + \int_0^{\infty} dv\, \left(\sqrt{1+\mathrm{e}^v} - \mathrm{e}^{v/2} \right)$$
$$= 2\mathrm{e}^{\varepsilon t/2} + K,$$

der

$$K \equiv \int_0^{\infty} dv\, \left(\sqrt{1+\mathrm{e}^v} - \mathrm{e}^{v/2} \right) - 2.$$

Vi finner derfor at

$$y(t) \sim \frac{1}{2} \left(2^{1/4} + 2^{-1/4} \right) \mathrm{e}^{K/\varepsilon}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon t/4} \exp\left(\frac{2}{\varepsilon}\, \mathrm{e}^{\varepsilon t/2} \right) \tag{61}$$

når $t \to \infty$.

Kommentarer:

Det er ikke vanskelig å beregne K eksakt. Ved å innføre substitusjonen

$$\tau = \sqrt{1+\mathrm{e}^v},$$

finner vi

$$I = \int_0^{\varepsilon t} dv\, \sqrt{1+\mathrm{e}^v} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\varepsilon t}}} d\tau\, \left(2 + \frac{1}{\tau-1} - \frac{1}{\tau+1} \right)$$
$$= 2\sqrt{1+\mathrm{e}^{\varepsilon t}} - 2\sqrt{2} + \log\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\varepsilon t}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\varepsilon t}}+1} \right) - \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)$$
$$\sim 2\,\mathrm{e}^{\varepsilon t/2} - 2\sqrt{2} - \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \quad \text{når } \varepsilon t \to \infty.$$

Altså har vi at

$$K = -2\sqrt{2} + 2\log\left(\sqrt{2}+1\right) = -1.06567995070710404714\ldots \tag{62}$$

Det er også mulig å finne den eksakte løsningen til problemet (54–55). Ved å gjøre substitusjonen

$$z = \frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\varepsilon t/2}, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-t}\, F(z)$$

transformerer ligning (54) over på den modifiserte Bessel-ligningen

$$F''(z) + \frac{1}{z}\, F'(z) - \left[1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right] F(z) = 0, \tag{63}$$

der $\nu = 2/\varepsilon$. Som to partikulærløsninger kan vi derfor velge

$$f_1(t) \equiv 2^{1/4} \sqrt{2\pi\nu}\, \mathrm{e}^{-\nu\eta_0}\, \mathrm{e}^{-t}\, I_\nu(z), \tag{64}$$

$$f_2(t) \equiv 2^{1/4} \sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\, \mathrm{e}^{\nu\eta_0}\, \mathrm{e}^{-t}\, K_\nu(z), \tag{65}$$

der altså

$$z = \frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\varepsilon t/2}, \qquad \nu = \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{og} \quad \eta_0 = \sqrt{2} - \log\left(\sqrt{2}+1\right). \tag{66}$$

Den eksakte løsningen kan derfor skrives

$$f(t) = \frac{f_2'(0)\, f_1(t) - f_1'(0)\, f_2(t)}{f_2'(0)\, f_1(0) - f_1'(0)\, f_2(0)}. \tag{67}$$

Fra den uniforme asymptotiske utviklingen for Besselfunksjoner av høy orden (Debye-utviklingen) finner man at

$$f_1(0) \sim 1, \qquad f_1'(0) \sim \sqrt{2} - 1,$$
$$f_2(0) \sim 1, \qquad f_2'(0) \sim -\sqrt{2} - 1,$$

når $\varepsilon \to 0^+$, og at

$$f_1(t) \sim 2^{1/4}\,\mathrm{e}^{-\nu\eta_0}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t/4}\,\exp\left(\frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\varepsilon t/2}\right)$$
$$f_2(t) \sim 2^{1/4}\,\mathrm{e}^{\nu\eta_0}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t/4}\,\exp\left(-\frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\varepsilon t/2}\right)$$

når $\varepsilon \to 0^+$, $\varepsilon t \to \infty$. Med dette innsatt i ligning (67) finner man igjen at

$$f(t) \sim \frac{1}{2}\left(2^{1/4} + 2^{-1/4}\right)\,\exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon}\left[\sqrt{2} - \log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\right\}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t/4}\,\exp\left(\frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\varepsilon t/2}\right) \qquad (68)$$

når $\varepsilon \to 0^+$, $\varepsilon t \to \infty$. Dette er konsistent med ligning (61).