

## Fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

## LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 16.12.1994

1. (a) Vi skulle klassifisere ligningen

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + x^{2n} - \lambda \right] \psi(x) = 0. \quad (1)$$

Den har ingen singulære punkter i den endelige delen av planet, med et rang  $n + 2$  irregulært singulært punkt i  $x = \infty$ .

**Kommentar:** Ved å innføre nye variable,  $z = x^2$ ,  $\Psi(z) = \psi(x)$  kan ligningen transformeres over på formen

$$\left[ -\left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2z} \frac{d}{dz} \right) + \frac{1}{4z} (z^n - \lambda) \right] \Psi(z) = 0,$$

som har et regulært singulært punkt i  $z = 0$ , og et rang  $r = 2 + \lfloor n/2 \rfloor$  irregulært singulært punkt i  $z = \infty$ . (Altså er  $r = 2, 3, 3, 4, 4, \dots$  for  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ )

- (b) Ved å innføre nye variable,  $z = x^\alpha$  (dvs.  $x = z^\beta$ ),  $\Psi(z) = \psi(x)$  kan ligning (1) når  $\lambda = 0$  transformeres over på formen

$$\left[ -\left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1-\beta}{z} \frac{d}{dz} \right) + \beta^2 z^{2(n+1)\beta-2} \right] \Psi(z) = 0.$$

Ved å velge  $\beta$  slik at

$$2(n+1)\beta - 2 = \begin{cases} -1 & \text{dvs. } \beta = \frac{1}{2}(n+1)^{-1}, \text{ eller} \\ 0 & \text{dvs. } \beta = (n+1)^{-1}. \end{cases}$$

så blir dette en ligning med ett regulært singulært punkt i  $z = 0$ , og et rang 2 irregulært singulært punkt i  $z = \infty$ . Summen av rangen til singularitetene blir altså lik 3, som betyr at det er mulig å finne en eksakt løsning uttrykt ved standard (spesielle) funksjoner.

**Kommentar:** Ved å velge alternativet  $\beta = (n+1)^{-1}$ , og videre innføre nye variable  $u = \beta z$ ,  $y(u) = z^{-\beta/2} \Psi(z)$ , så transformeres ligning (1) over på formen

$$\left[ \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} - \left( 1 + \frac{\beta^2}{4u^2} \right) \right] y(u) = 0,$$

som er den modifiserte Besselligningen. Den generelle løsningen til (1) kan derfor når  $\lambda = 0$  skrives på formen

$$\psi(x) = x^{1/2} [C_1 I_{\beta/2}(u) + C_2 I_{-\beta/2}(u)], \quad (2)$$

der altså  $\beta = (n+1)^{-1}$  og  $u = \beta x^{1/\beta}$ .

- (c) Vi skriver  $\psi(x) = \exp(S(x))$ , og finner at  $S(x)$  må oppfylle Ricattiligningen

$$S''(x) + S'(x)^2 = x^{2n} - \lambda \approx x^{2n} \quad \text{når } x \rightarrow \infty.$$

Antar utviklingen  $S(x) = S_0(x) + S_1(x) + \dots$ , der  $S_0'(x)^2 = x^{2n}$ , dvs.

$$S_0(x) = \frac{\pm 1}{n+1} x^{n+1}.$$

Til neste orden fås ligningen

$$S_0(x)'' + 2S_0'(x)S_1'(x) = 0,$$

dvs.

$$S_1'(x) = -\frac{S_0''(x)}{2S_0'(x)} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_0'(x) = -\frac{n}{2} \frac{d}{dx} \log x,$$

som kan integreres til  $S_1(x) = \log x^{-n/2} + \log C$ , der  $C$  er en vilkårlig konstant. Altså har vi funnet at

$$\psi(x) \sim C x^{-n/2} \exp\left(\frac{\pm 1}{n+1} x^{n+1}\right) \quad \text{når } x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

- (d) Første ordens WKB kvantiseringsbetingelse for egenverdi-problemet

$$\left[ -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{d^2}{dx^2} + Q(x; \lambda) \right] \psi(x) = 0,$$

lyder

$$\epsilon \int_{x_-}^{x_+} dx \sqrt{-Q(x, \lambda_m)} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi. \quad (4)$$

Merk at dette resultatet er til første orden i den lille utviklingsparameteren  $\epsilon^{-1}$ ! (Som er en notasjonsmessig mildt sagt uheldig bruk av symbolet  $\epsilon$  — som skriver seg fra en trykkfeil i oppgaveteksten som de fleste av eksamenskandidatene ble gjort oppmerksom på.)

- (e) For ligning (1) blir WKB kvantiseringsbetingelsen

$$\begin{aligned} \int_{-x_+}^{x_+} dx \sqrt{\lambda_m - x^{2n}} &= \frac{1}{n} \lambda_m^{(n+1)/2n} \int_0^1 \frac{du}{u} u^{1/2n} (1-u)^{1/2} \\ &= \frac{1}{n} \lambda_m^{(n+1)/2n} \frac{\Gamma(1/2n) \Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2 + 1/2n)} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi. \end{aligned}$$

Løst ut blir egenverdiene i denne tilnærmelsen

$$\lambda_m = C_n \left(m + \frac{1}{2}\right)^{2n/(n+1)}, \quad (5)$$

der

$$C_n = \left[ \frac{n\pi \Gamma(1 + (n+1)/2n)}{\Gamma(1/2n) \Gamma(3/2)} \right]^{2n/(n+1)}.$$

**Kommentarer:** Det er mange andre måter å skrive uttrykket for  $C_n$  på, avhengig av hvilke relasjoner for  $\Gamma$ -funksjonene man bruker. To mulige omskrivninger er

$$\begin{aligned} C_n &= \left[ (n+1) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((n+1)/2n)}{\Gamma(1/2n)} \right]^{2n/(n+1)} \\ &= \left[ 2^{(n-1)/n} (n+1) \pi \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/2n)^2} \right]^{2n/(n+1)}. \end{aligned}$$

Merk også at i tilfellet  $n = 1$  (harmonisk oscillator) blir WKB-formelen for egenverdiene eksakt.

2. (a) Vi skulle bestemme

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^a (1+t)^{-2a} \\ &= \int_0^\infty dt e^{-t+a[\log(t)-2\log(1+t)]} \quad \text{når } a \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Vi benytter sadelpunktmetoden, som anvendt på dette eksemplet blir det samme som Laplace's metode. Sadelpunktet er gitt ved den  $t$ -verdien som løser ligningen

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t; a) \equiv \frac{\partial}{\partial t} a[\log(t) - 2\log(1+t)] = \frac{a}{t} - \frac{2a}{1+t} = 0,$$

dvs.  $t = 1$ . Vi trenger videre

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t; a) \right]_{t=1} = \left[ -\frac{a}{t^2} + \frac{2a}{(1+t)^2} \right]_{t=1} = -\frac{a}{2}.$$

Integralet kan da approksimeres med

$$I_1(a) \approx e^{-1} \frac{1^a}{(1+1)^{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-(a/4)\tau^2} = e^{-1} 4^{-a} \sqrt{4\pi/a}. \quad (7)$$

(b) Vi skulle bestemme

$$\begin{aligned} I_2(a) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^a (1+t)^{-a} \\ &= \int_0^\infty dt e^{-t+a[\log(t)-\log(1+t)]} \quad \text{når } a \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Her havner sadelpunktet i  $t = \infty$ , der  $e^{-t}$  er meget liten. Altså må vi ta hensyn til denne faktoren når posisjonen av sadelpunktet skal bestemmes. (Eller, sagt på en annen måte, vi må bruke Laplace's metode med et bevegelig maksimum). Sadelpunktet er gitt ved den  $t$ -verdien som løser ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t; a) \equiv \frac{\partial}{\partial t} [-t + a \log(t) - a \log(1+t)] \\ &= -1 + \frac{a}{t} - \frac{a}{1+t} \approx -1 + \frac{a}{t^2}, \end{aligned}$$

dvs.  $t \approx \sqrt{a}$ . Vi trenger videre

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(t; a) \right]_{t=1} \approx - \frac{2a}{t^3} \Big|_{t=\sqrt{a}} = -2 a^{-1/2}.$$

Integralet kan da approksimeres med

$$I_2(a) \approx e^{-\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}^a}{(1 + \sqrt{a})^a} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2/\sqrt{a}} = e^{-2\sqrt{a}} \sqrt{\pi} a^{1/4}. \quad (9)$$

Her har vi benyttet at

$$\frac{\sqrt{a}^a}{(1 + \sqrt{a})^a} = e^{-a \log(1 + 1/\sqrt{a})} \approx e^{-\sqrt{a}} \quad \text{når } a \rightarrow \infty.$$

(c) Vi skulle bestemme

$$I_3(a) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^a (1+t)^a = \int_0^1 dt e^{-t} t^a (1+t)^a + \int_1^{\infty} dt e^{-t} t^a (1+t)^a \quad \text{når } a \rightarrow -1^+. \quad (10)$$

Integralet

$$\int_1^{\infty} dt e^{-t} t^a (1+t)^a$$

går mot en endelig konstant når  $a \rightarrow -1^+$ . Den første integranden kan vi rekkeutvikle og integrere ledd for ledd

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt e^{-t} t^a (1+t)^a &= \int_0^1 dt t^a [1 + (a-1)t + \dots] \\ &= \frac{1}{a+1} + \text{ledd som går mot en endelig konstant når } a \rightarrow -1^+. \end{aligned}$$

Altså

$$I_3(a) \sim \frac{1}{a+1} \quad \text{når } a \rightarrow -1^+. \quad (11)$$

**Kommentar:** Alle integralene i denne oppgaven kan uttrykkes ved spesielle funksjoner. Vi har integralframstillingen

$$\Gamma(a)U(a, b, z) = \int_0^{\infty} dt e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} \quad (12)$$

der  $U(a, b, z)$  er en konfluent hypergeometrisk funksjon (Kummer's  $U$ -funksjon).

3. I denne oppgaven skulle vi benytte grensesjiktmetoden til å løse randverdi problemet

$$\varepsilon y''(x) - y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = x, \quad \text{for } 1 < x < 2, \quad y(1) = y(2) = 0. \quad (13)$$

når  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

- (a) Siden koeffisienten framfor  $y'$ -leddet er negativ (relativt til koeffisienten framfor  $y''$ ) i hele intervallet  $[1, 2]$  kan løsningen bare ha et grensesjikt til høyre, dvs. ved  $x = 2$ . Og, som vanlig ved et randgrensesjikt må tykkelsen av dette skalere som

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \quad (14)$$

når  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

- (b) Den ytre løsningen må tilfredsstille ligningssettet,

$$-y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -x \frac{d}{dx}x^{-1}y(x) = x, \quad y(1) = 0.$$

som kan integreres til

$$x^{-1}y(x) = -\int_1^x dx' = (1-x).$$

Den ytre løsningen er derfor

$$y_{\text{ytre}} = x(1-x). \quad (15)$$

I det indre området innfører vi  $X = (2-x)/\varepsilon$ ,  $Y(X) = y(x)$  og finner at den indre ligningen må tilfredsstille ligningssettet

$$Y''(X) + Y'(X) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(\infty) = -2.$$

Dvs. at den indre løsningen blir

$$Y(X) = 2(e^{-X} - 1)$$

eller omskrevet i de opprinnelige variable:

$$y_{\text{indre}} = 2(e^{(x-2)/\varepsilon} - 1) \quad (16)$$

- (c) I matching området, som inkluderer

$$\varepsilon^{1/2} \leq (2-x) \leq \varepsilon^{1/3} \quad \text{når } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

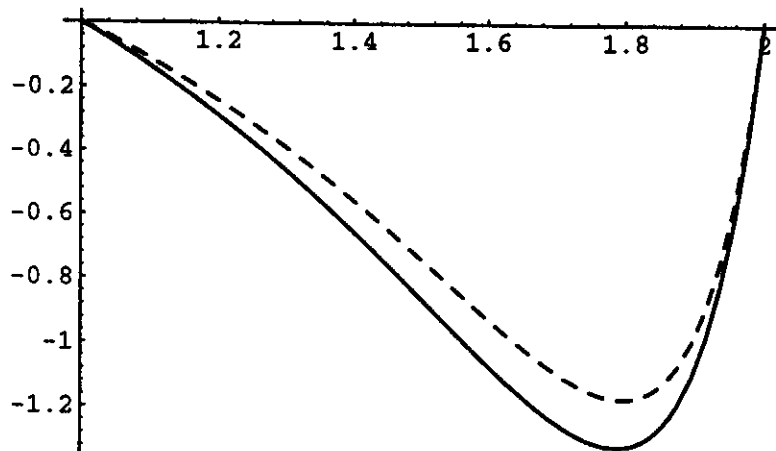
faller den ytre og indre løsningen sammen, og er lik

$$y_{\text{match}} = -2.$$

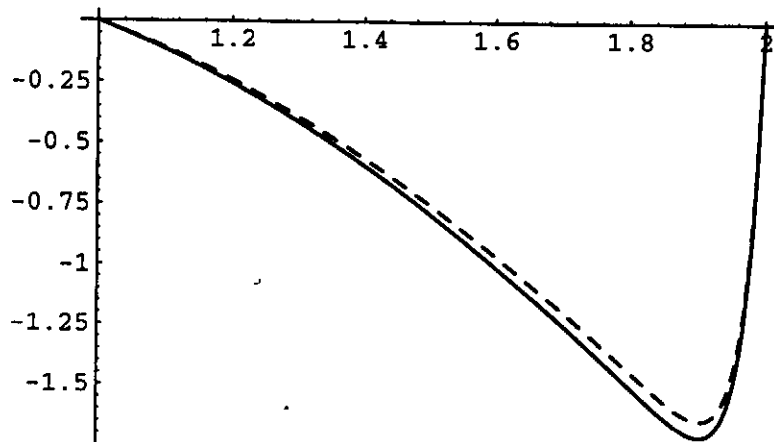
Den uniforme tilnærmelsen blir lik

$$\begin{aligned} y_{\text{uniform}} &= y_{\text{ytre}} + y_{\text{indre}} - y_{\text{match}} \\ &= x(1-x) + 2e^{(x-2)/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (17)$$

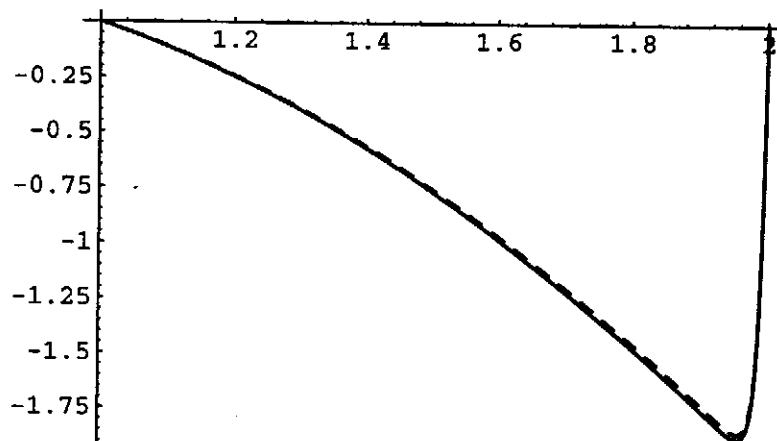
**Kommentar:** Merk at den uniforme løsningen ikke helt oppfyller grensebetingelsen i  $x = 1$ . Vi har  $y_{\text{uniform}} = 2e^{-1/\varepsilon}$  i  $x = 1$ . Som illustrasjon på nøyaktigheten av tilnærmingen plotter vi i figurene nedenfor  $y_{\text{uniform}}$  (stiplet) sammenlignet med en numerisk løsning av problemet (heltrukket), for  $\varepsilon = 0.1, 0.03$ , og  $0.01$ .



Numerisk løsning av ligning (13) (heltrukket), sammenlignet med den uniforme tilnærmingen (17) (stiplet), for  $\epsilon = 0.1$ .



Numerisk løsning av ligning (13) (heltrukket), sammenlignet med den uniforme tilnærmingen (17) (stiplet), for  $\epsilon = 0.03$ .



Numerisk løsning av ligning (13) (heltrukket), sammenlignet med den uniforme tilnærmingen (17) (stiplet), for  $\epsilon = 0.01$ .

4. I denne oppgaven skulle vi analysere startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) + \varepsilon \dot{y}(t)^3 = \cos(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad (18)$$

ved bruk av flerskalautvikling.

(a) Med  $y(t) = \varepsilon^\alpha Y(t, \varepsilon^\beta t)$  finner vi etter divisjon med  $\varepsilon^\alpha$  ligningen

$$\begin{aligned} Y_{tt} + Y \\ + 2\varepsilon^\beta Y_{t\tau} + \varepsilon^{1+2\alpha} Y_{t\tau}^3 - \varepsilon^{-\alpha} \cos t \\ + \varepsilon^{2\beta} Y_{\tau\tau} + \varepsilon^{1+2\alpha} \left[ (Y_t + \varepsilon^\beta Y_\tau)^3 - Y_t^3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Vi antar balanse mellom leddene i annen linje, dvs. at

$$1 + 2\alpha = -\alpha = \beta,$$

eller

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}. \quad (20)$$

(b) Løsningen (20) viser videre at leddene i første linje av (19) er de dominerende, og må kansellere til ledende orden. Den laveste ordens løsning blir derfor

$$Y_0(t, \tau) = A_0(\tau) \sin t + B_0(\tau) \cos t. \quad (21)$$

Startbetingelsene impliserer videre at

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} Y_0 \right) (0, 0) = Y_0(0, 0) = 0,$$

dvs. at

$$A_0(0) = B_0(0) = 0. \quad (22)$$

(c) Vi ønsker at ligningen for neste ordens tilnærming,  $Y_1(t, \tau)$ , ikke skal drives på sin egen resonansfrekvens (dvs. at den skal være fri for sekulære ledd). Dette betyr at kombinasjonen

$$\begin{aligned} 2Y_{0t\tau} + Y_0^3 - \cos t &= 2A_0' \cos t - 2B_0' \sin t - \cos t \\ + \frac{3}{4} (A_0^2 + B_0^2) (A_0 \cos t + B_0 \sin t) \\ &+ \text{ikke-sekulære ledd} \end{aligned}$$

må være fri for ledd som er proporsjonale med  $\sin t$  og  $\cos t$ . Altså

$$2A_0' = -\frac{3}{4} (A_0^2 + B_0^2) A_0 + 1, \quad (23)$$

$$2B_0' = -\frac{3}{4} (A_0^2 + B_0^2) B_0. \quad (24)$$

Siden  $A_0(0) = B_0(0) = 0$  leser vi direkte ut av (23,24) at

$$A_0'(0) = 1, \quad B_0'(0) = 0. \quad (25)$$

- (d) Nå vi multipliserer (23) med  $A_0$  og (24) med  $B_0$ , og legger sammen så finner vi

$$A_0 = R' + \frac{3}{4}R^2, \quad (26)$$

der  $R = A_0^2 + B_0^2$  (slik at  $R' = 2A_0 A_0' + 2B_0 B_0'$ ). Vi setter dette uttrykket tilbake inn i (23), og finner

$$2R'' + 3R R' = -\frac{3}{4}R \left( R' + \frac{3}{4}R^2 \right) + 1,$$

eller omskrevet

$$R'' + \frac{15}{8}R R' + \frac{9}{32}R^3 - \frac{1}{2} = 0. \quad (27)$$

Siden vi allerede kjenner  $A_0(0)$ ,  $B_0(0)$ ,  $A_0'(0)$  og  $B_0'(0)$  så finner vi lett startbetingelsene for denne ligningen:

$$R(0) = R'(0) = 0. \quad (28)$$

- (e) Bortsett fra friksjonsleddet (proporsjonalt med  $R R'$ ) er (27) bevegelsesligningen for en partikkel i et potensial  $V(R) = -\frac{1}{2}R + \frac{9}{128}R^4$ . Med friksjon til stedet vil partikkelen nødvendigvis ende opp i bunnen av dette potensialet, dvs. der

$$\frac{9}{32}R^3 - \frac{1}{2} = 0.$$

Altså har vi funnet at

$$R(\tau) \rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \equiv R_\infty \quad \text{når } \tau \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Fra dette og ligning (26) følger det at

$$\begin{aligned} A_0(\tau) &\rightarrow \frac{3}{4}R_\infty^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \equiv A_\infty, \quad \text{og} \\ B_0(\tau) &\rightarrow \sqrt{R_\infty - A_\infty^2} = 0 \quad \text{når } \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

**Kommentar:** Denne oppgaven er løst på en måte som er uavhengig av de spesielle startbetingelsene for problemet. Her kan vi komme et stykke videre: Siden  $B_0(0) = 0$  vil ligning (24) ha løsningen

$$B_0(\tau) = 0,$$

som innsatt i (23) fører til en første ordens ligning for  $A_0$ ,

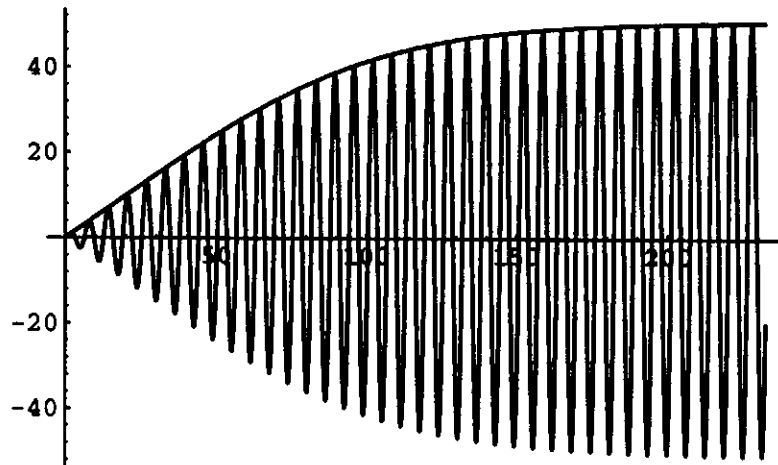
$$2A_\infty^3 A_0'(\tau) = A_\infty^3 - A_0(\tau)^3,$$

der  $A_\infty = (4/3)^{1/3}$ . Denne ligningen kan lett integreres. Med  $a(\tau) \equiv A_0(\tau)/A_\infty$  finner vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \tau &= \int_0^{a(\tau)} \frac{dx}{1-x^3} \\ &= \frac{1}{6} \log \left[ \frac{1+a(\tau)+a(\tau)^2}{(1-a(\tau))^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctg} \left[ \frac{1+2a(\tau)}{\sqrt{3}} \right] - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Som illustrasjon på nøyaktigheten i tilærmingen plotter vi i figuren nedenfor en numerisk løsning av problemet sammenlignet med omhyllingskurven  $\epsilon^{-1/3} \sqrt{R(\tau)}$ , for  $\epsilon = 0.00001$ . (Dette kan synes som en svært liten størrelse, men den egentlige utviklingsparameteren i problemet er forholdet mellom de to tidskalaene:  $\tau/t = \epsilon^{1/3}$ .)





Numerisk løsning av ligning (18) for  $\epsilon = 0.00001$ , sammenlignet med omhyllingskurven  $\epsilon^{-1/3} \sqrt{R(\tau)}$ , med  $R(\tau)$  beregnet fra ligning (27).