Fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 20.12.1996

1. I denne oppgaven skulle vi analysere ligningen

$$\left[(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - t\frac{d}{dt} + (a - b\,t^2)\right] f(t) = 0. \tag{1}$$

(a) Ligning (1) har regulære singulære punkter i $t = \pm 1$, og (dersom $b \neq 0$) et rang 2 irregulært singulært punkt i $t = \infty$. Dersom $b = 0$ er også $t = \infty$ et regulært singulært punkt.

(b) Vi gjør ansatzen $f(t) \sim (t-1)^\nu$ og finner indeksligningen

$$(2\nu - 1)\,\nu = 0, \tag{2}$$

dvs. $\nu = 0, \frac{1}{2}$. Altså vil

$$f(t) \sim \text{konstant} \qquad \text{eller} \quad f(t) \sim (t-1)^{1/2} \qquad \text{når } t \to 1. \tag{3}$$

(c) Vi ser bare på tilfellet $b \neq 0$. Substitusjonen

$$f = \mathrm{e}^S$$

fører til en Ricatti-ligning for S,

$$(1-t^2)(S'^2 + S'') - tS' - bt^2 = 0,$$

som når $t \to \infty$ kan forenkles til

$$S'^2 + \frac{1}{t}S' + b = 0, \tag{4}$$

med løsning

$$S' = -\frac{1}{2t} \pm \sqrt{\frac{1}{4t^2} - b} \approx \pm ib - \frac{1}{2t}.$$

Altså blir ledende ordens oppførsel

$$y(t) \sim Kt^{-1/2}\mathrm{e}^{\pm ibt} \qquad \text{når } t \to \infty, \tag{5}$$

der K er en vilkårlig konstant. Merk at vi her ikke trenger å ta hensyn til S'' til den orden vi har regnet. Dette skyldes at ledende ordens løsning for S' er en konstant.

2. (a) Hvis vi har gitt en ligning med mange ledd, og som avhenger av en parameter ξ, så kan det hende at to av leddene blir mye større enn de andre når f.eks. $\xi \to \infty$. En ledende ordens løsning til ligningen fås da ved å kreve at disse dominerende leddene skal balansere hverandre. Det er ikke sikkert at man på forhånd kan avgjøre hvilke ledd som er dominerende; en systematisk framgangsmåte er å prøve balanse mellom alle mulige par i ligningen, og beholde de løsningene som er konsistente med den antagelsen man gikk ut fra. Metoden blir eksemplifisert i neste punkt.

(b) I denne oppgaven skulle vi analysere differanseligningen

$$\mathcal{Z}_{n+1} + n\mathcal{Z}_n - \mathcal{Z}_{n-1} = 0, \tag{6}$$

når $n \to \infty$. Det er enklest å benytte metoden med dominerende balanse.

i. Antagelsen $|\mathcal{Z}_{n+1}| \approx |n\mathcal{Z}_n| \gg |\mathcal{Z}_{n-1}|$ gir rekursjonen

$$\mathcal{Z}_{n+1} = -n\mathcal{Z}_n,$$

med løsning

$$Z_{n+1} \sim (-1)^n\, n!\, K \sim (-1)^n n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}\, \bar{K} \qquad \text{når } n \to \infty. \tag{7}$$

Her har vi brukt Stirling's formel, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n}$ når $n \to \infty$. Denne løsningen er konsistent med den antagelsen om dominerende balanse som ble gjort. Her er K, $\bar{K}$ vilkårlige konstanter.

ii. Antagelsen $|n\mathcal{Z}_n| \approx |\mathcal{Z}_n| \gg |\mathcal{Z}_{n+1}|$ gir rekursjonen

$$n\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n-1},$$

med løsning

$$\mathcal{Z}_n \sim K/n! \sim n^{-n-1/2}\, \mathrm{e}^n\, \bar{K} \qquad \text{når } n \to \infty. \tag{8}$$

Denne løsningen er konsistent med den antagelsen om dominerende balanse som ble gjort. Her er K, $\bar{K}$ vilkårlige konstanter.

iii. Antagelsen $|\mathcal{Z}_{n+1}| \approx \mathcal{Z}_{n-1}| \gg |n\mathcal{Z}_n|$ leder ikke til en løsning som er konsistent med denne antagelsen. Siden vi allerede har funnet to mulige asymptotiske oppførsler til en annen ordens ligning, venter vi heller ikke at der skal finnes flere.

En alternativ metode å løse problemet på er å skrive

$$\mathcal{Z}_n = \mathrm{e}^{S_n}, \quad \mathcal{Z}_{n+1} = \mathrm{e}^{(S_{n+1}-S_n)}\mathrm{e}^{S_n} \equiv \mathrm{e}^{(DS)_n}\mathcal{Z}_n,$$
$$\mathcal{Z}_{n-1} = \mathrm{e}^{-(S_n-S_{n-1})}\mathrm{e}^{S_n} \equiv \mathrm{e}^{-(DS)_{n-1}}\mathcal{Z}_n.$$

Med $y_n \equiv \mathrm{e}^{(DS)_n}$ fås ligningen

$$y_n + n - y_{n-1}^{-1} = 0, \tag{9}$$

Ved å anta at $y_{n-1} \approx y_n$ får vi en ordinær annengradsligning for y_n. Når vi korrigerer løsningene av denne til neste orden fås

$$y_n \sim \begin{cases} -n \\ (n+1)^{-1} \end{cases} \qquad \text{når } n \to \infty.$$

Korreksjonene til disse uttrykkene er av relativ orden n^{-2} eller mindre. Dvs. at

$$(DS)_n \sim \begin{cases} i\pi + \log(n) \\ -\log(n) - \frac{1}{n} \end{cases} \qquad \text{når } n \to \infty. \tag{10}$$

Korreksjonen til disse uttrykkene er av orden n^{-2} eller mindre. Vi har

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (DS)_k\,, \tag{11}$$

der summen kan utføres ved bruk av Euler-McLaurin's summasjonsformel:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n dx\, f(x) - \frac{1}{2}\left[f(n) - f(m)\right] + \cdots. \tag{12}$$

Vi finner at

$$\sum^{n} \log(k) \sim \left(n - \frac{1}{2}\right)\log(n) - n + \text{konstant} \quad \text{når } n \to \infty,$$

slik at den asymptotiske oppførselen til $\mathcal{Z}_n = \mathrm{e}^{S_n}$ blir

$$\mathcal{Z}_n \sim \begin{cases} n^{n-1/2}\,\mathrm{e}^{-n}\,K \\ n^{-n-1/2}\,\mathrm{e}^{n}\,\bar{K} \end{cases} \quad \text{når } n \to \infty, \tag{13}$$

der K, $\bar{K}$ er vilkårlige konstanter.

3. I denne oppgaven skulle vi analysere integralet

$$\mathcal{F}_\nu(z) \equiv \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-z\cosh t}\,(\sinh t)^{2\nu} \tag{14}$$

i forskjellige grenser.

(a) Når $z \to 0$ kommer hovedbidraget til integralet fra store t (integranden har maksimum når $t \approx \log(4\nu/z)$). Der kan vi gjøre tilnærmingene

$$\cosh t \approx \sinh t \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^t,$$

slik at vi får, med $u = \mathrm{e}^t$,

$$\mathcal{F}_\nu(z) \approx \int_0^\infty \frac{du}{u}\,\mathrm{e}^{-(z/2)u}\,(u/2)^{2\nu} = z^{-2\nu}\,\Gamma(2\nu). \tag{15}$$

Merk at vi har utvidet integrasjonsområdet for u fra $(1,\infty)$ til $(0,\infty)$. Det kan vi gjøre fordi bidraget fra dette området er neglisjerbart i forhold til hovedbidraget.

(b) Når $z \to \infty$ kommer hovedbidraget til integralet fra små t. Der kan vi gjøre tilnærmingene

$$\cosh t \approx 1 + \frac{1}{2}t^2, \qquad \sinh t \approx t,$$

slik at vi får

$$\mathcal{F}_\nu(z) \approx \mathrm{e}^{-z}\int_0^\infty dt\,\mathrm{e}^{-zt^2/2}t^{2\nu} = \frac{1}{2}\,(2/z)^{\nu+1/2}\,\mathrm{e}^{-z}\int_0^\infty \frac{du}{u}\,\mathrm{e}^{-u}\,u^{\nu+1/2}$$
$$= \frac{1}{2}(2/z)^{\nu+1/2}\,\mathrm{e}^{-z}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2}). \tag{16}$$

(c) Når $\nu \to \infty$ kommer hovedbidraget til integranden fra store t. Der kan vi igjen gjøre tilnærmingene som under punkt a). Dessuten blir integranden $\mathrm{e}^{F(t)}$ (der $F(t) = -z\cosh t + 2\nu\log(\sinh t)$) skarpt lokalisert om et maksimum i $t = \log(4\nu/z) \equiv t_S$, slik at vi kan bruke sadelpunktmetoden til å evaluere integralet. Vi finner at

$$F(t_S) \sim 2\nu\log(2\nu/z) - 2\nu, \quad F''(t_S) \sim -2\nu \quad \text{når } \nu \to \infty,$$

slik at

$$\mathcal{F}_\nu(z) \approx \mathrm{e}^{F(t_S)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathrm{e}^{F''(t_S)\tau^2/2} = z^{-2\nu}\, \mathrm{e}^{2\nu\log(2\nu)-2\nu} \sqrt{\pi/\nu}. \tag{17}$$

Dette er det samme resultatet som vi får ved å expandere (15) for store ν.

(d) Vi skriver integranden som $e^{F(t)}$, med $F(t) = \nu(-\zeta\cosh t + 2\log\sinh t)$. Siden ν er stor kan integranden evalueres ved sadelpunktmetoden. Sadelpunktet t_S må tilfredsstille ligningen $F'(t_S) = 0$, dvs.

$$-\zeta\sinh t_S + 2\frac{\cosh t_S}{\sinh t_S} = 0,$$

med løsning

$$\cosh t_S = \frac{1}{\zeta}\left(\sqrt{1+\zeta^2}+1\right). \tag{18}$$

Vi finner

$$F(t_S) = \nu\left[-\zeta\cosh t_S + \log(2\cosh t_S/\zeta)\right],$$
$$F''(t_S) = -\nu\left(\cosh t_S + \zeta/\cosh t_S\right).$$

Uttrykt ved disse størrelsene har vi funnet

$$\mathcal{F}_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-F''(t_S)}}\, \mathrm{e}^{F(t_S)}. \tag{19}$$

4. I denne oppgaven skulle vi bruke WKB-metoden til å analysere ligningen

$$\left(\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2} + \sin^2 x\right)\psi(x) = 0, \text{ for } -\infty < x < \infty, \tag{20}$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

(a) Vi skriver

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{iS(x)/\varepsilon} \tag{21}$$

og finner at $S(x)$ må tilfredsstille Ricatti-ligningen

$$-S' + i\varepsilon S'' + \sin^2 x = 0. \tag{22}$$

Med rekkeutviklingen

$$S = S_0 - i\varepsilon S_1 + \cdots$$

fås ligningene

$$S_0' = \pm \sin x, \qquad S_1' = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log(S_0'). \tag{23}$$

Ledende ordens WKB-løsning blir derfor

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|\sin(x)|}}\left(C_+ \mathrm{e}^{i\cos(x)/\varepsilon} + C_- \mathrm{e}^{-i\cos(x)/\varepsilon}\right), \tag{24}$$

der $C_\pm$ er konstanter.

(b) Løsningene over bryter sammen når $\sin x \to 0$, dvs når $x \approx 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Tykkelsen på dette området vil skalere som $\varepsilon^{1/2}$ når $\varepsilon \to 0$. Dette blir utledet i neste punkt.

(c) I området $x \approx n\pi$ kan vi gjøre tilnærmelsen $\sin^2 x \approx (x - n\pi)^2$. Vi innfører dessuten variablene

$$X = (x - n\pi)/\varepsilon^\nu, \qquad \Psi(X) = \psi(x),$$

slik at den forenklede ligningen blir

$$\left(\varepsilon^{2-2\nu}\frac{d^2}{dX^2} + \varepsilon^{2\nu}X^2\right)\Psi(X) = 0. \tag{25}$$

Vi ser at ε-avhengigheten kan faktoriseres ut når vi velger $\nu = \frac{1}{2}$. Dette betyr at tykkelsen på overgangsområdet skalerer som $\varepsilon^{1/2}$.

(d) Løsningen til (25) må for store $|X|$ matche oppførselen til (24) for små $|x - n\pi|$. Altså må der f.eks. finnes en løsning $\Psi_+(X)$ av (25) slik at

$$\Psi_+(X) \sim \frac{1}{\sqrt{|X|}}\begin{cases} c_+\mathrm{e}^{iX^2/2} & \text{for } X \to -\infty \\ \alpha c_+ \mathrm{e}^{iX^2/2} + \beta c_+ \mathrm{e}^{-iX^2/2} & \text{for } X \to \infty. \end{cases} \tag{26}$$

Likeså, siden (25) er invariant under kompleks konjugering, må der finnes en løsning $\Psi_-(X)$ av (25) slik at

$$\Psi_-(X) \sim \frac{1}{\sqrt{|X|}}\begin{cases} c_-\mathrm{e}^{-iX^2/2} & \text{for } X \to -\infty \\ \alpha^* c_- \mathrm{e}^{-iX^2/2} + \beta^* c_- \mathrm{e}^{iX^2/2} & \text{for } X \to \infty. \end{cases} \tag{27}$$

Se nå på en løsning $\psi(x)$ som er gyldig globalt. I hvert område $(n-1)\pi < x < n\pi$ må den kunne skrives på formen

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|\sin(x)|}}\left(a_+(n) f_+(x) + a_-(n) f_-(x)\right), \tag{28}$$

der

$$f_\pm(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\pm i\cos(x)/\varepsilon}, & \text{for } 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \\ \mathrm{e}^{\mp i\cos(x)/\varepsilon}, & \text{for } (2n-1)\pi < x < 2n\pi, \end{cases} \tag{29}$$

er periodiske med periode π (men ikke kontinuerlige i $x = n\pi$). Vi kjenner løsningen globalt når vi kjenner sammenhengen mellom settet $\{a_+(n)), a_-(n)\}$ og settet $\{a_+(n+1), a_-(n+1)\}$ for alle n. Vi utvikler derfor (28) for små $|x - n\pi|$

$$\psi(x) \sim \frac{\varepsilon^{-1/4}}{\sqrt{|X|}}\begin{cases} \mathrm{e}^{-i/\varepsilon} a_+(n)\mathrm{e}^{iX^2/2} + \mathrm{e}^{i/\varepsilon} a_-(n)\mathrm{e}^{-iX^2/2}, & X < 0, \\ \mathrm{e}^{i/\varepsilon} a_+(n+1)\mathrm{e}^{-iX^2/2} + \mathrm{e}^{-i/\varepsilon} a_-(n+1)\mathrm{e}^{iX^2/2}, & X > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Ved å sammenligne disse uttrykkene med (26,27) kan vi identifisere

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{-1/4}\mathrm{e}^{i/\varepsilon}a_+(n+1) &= \beta c_+ + \alpha^* c_- = \varepsilon^{-1/4}\left[\beta\mathrm{e}^{-i/\varepsilon}a_+(n) + \alpha^*\mathrm{e}^{i/\varepsilon}a_-(n)\right],\\
\varepsilon^{-1/4}\mathrm{e}^{i/\varepsilon}a_-(n+1) &= \alpha c_+ + \beta^* c_- = \varepsilon^{-1/4}\left[\alpha\mathrm{e}^{-i/\varepsilon}a_+(n) + \beta^*\mathrm{e}^{i/\varepsilon}a_-(n)\right].
\end{aligned}
$$

Fra disse relasjonene finner vi overgangsrelasjonen

$$
\begin{pmatrix} a_+(n+1) \\ a_-(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\mathrm{e}^{-2i/\varepsilon} & \alpha^* \\ \alpha & \beta^*\mathrm{e}^{2i/\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+(n) \\ a_-(n) \end{pmatrix} \tag{31}
$$

Når vi kjenner α og β kan vi finne den globale løsningen. Fra generelle prinsipper må overgangsmatrisen i (31) være en såkalt $SU(1,1)$ matrise, dvs. at den må ha determinant 1 og bevare skalarproduktet $|a_+|^2 - |a_-|^2$. I dette tilfellet betyr det at betingelsen $|\beta|^2 - |\alpha|^2 = 1$ må være oppfylt.

Lenger kan vi ikke komme uten å løse (25) eksplisitt.

(e) Den forenklede ligningen (25) lyder (når vi setter $\nu = \frac{1}{2}$)

$$
\left(\frac{d^2}{dX^2} + X^2\right)\Psi(X) = 0. \tag{32}
$$

Ved å innføre $\Psi(X) = \mathrm{e}^{iX^2/2}\,Y(X)$ får vi ligningen

$$
Y'' + 2iXY' + iY = 0. \tag{33}
$$

Dette er framskritt fordi (33) bare inneholder X til første orden. Ved Fouriertransform får vi derfor en første ordens ligning. Vi uttrykker Y ved integralformen

$$
Y(X) = \int_C dt\,\mathrm{e}^{itX}\,\tilde{Y}(t), \tag{34}
$$

der integrasjonskonturen C skal bestemmes senere, men forutsettes valgt slik at vi fritt kan gjøre delvis integrasjoner uten å få randbidrag. Vi finner at Y vil oppfylle (33) dersom $\tilde{Y}(t)$ oppfyller

$$
\tilde{Y}' + \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2i}\right)\tilde{Y} = 0, \tag{35}
$$

med løsning

$$
\tilde{Y}(t) = t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{it^2/4}\,K \tag{36}
$$

der K er en vilkårlig konstant. Altså har vi funnet

$$
Y(X) = \int_C \frac{dt}{t}\,t^{1/2}\,\mathrm{e}^{itX}\,\mathrm{e}^{it^2/4}. \tag{37}
$$

Vi får god konvergens av integralet dersom integrasjonveien velges slik at den asymptotisk går mot $\pm\mathrm{e}^{i\pi/4}\infty$. Vi får to lineært uavhengige løsninger avhengig av hvorhen vi velger å legge forgreningskuttet til $t^{1/2}$. Vi ser bare på tilfellet der dette legges langs den positive imaginære aksen.

For store $|X|$ evaluerer vi integralet ved sadelpunktmetoden. Sadelpunktet t_S må tilfredsstille ligningen

$$X + t_S/2 = 0, \qquad \text{dvs. } t_S = -2X,$$

og integrasjonskurven velges å inkludere linjen

$$t = t_S + \mathrm{e}^{i\pi/4}\tau, \qquad -\infty < \tau < \infty.$$

Bidraget til integralet fra sadelpunktet blir da for store $|X|$

$$(-2X)^{-1/2}\mathrm{e}^{-iX^2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\mathrm{e}^{-\tau^2/4} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,(-X)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-iX^2}, \qquad (38)$$

der $(-X)^{-1/2}$ er skal tolkes som $\mathrm{e}^{i\pi/2}|X|^{-1/2}$ når $X > 0$.

Når $X > 0$ er ikke dette hele bidraget til integralet; vi må også integrere rundt forgreningskuttet til $t^{1/2}$, fra $iX - i\epsilon$ til 0 til $iX + \epsilon$ (der $\epsilon \to 0^+$). Dette bidraget er

$$2\mathrm{e}^{i\pi/4}\int_0^X \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{1/2}\mathrm{e}^{-\tau X}\,\mathrm{e}^{-i\tau^2/4} \approx 2\mathrm{e}^{i\pi/4}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{1/2}\mathrm{e}^{-\tau X} = 2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i\pi/4}X^{-1/2}.$$

Altså har vi funnet en løsning $\Psi(X) = \mathrm{e}^{iX^2/2}Y(X)$ slik at

$$\Psi(X) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|X|}}\begin{cases} \mathrm{e}^{i\pi/4}\,\mathrm{e}^{-iX^2/2}, & \text{når } X \to -\infty, \\ \mathrm{e}^{3i\pi/4}\,\mathrm{e}^{-iX^2/2} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,\mathrm{e}^{iX^2/2}, & \text{når } X \to \infty. \end{cases} \qquad (39)$$

Ved å sammenligne med (27) kan vi av dette lese ut at $\alpha = \mathrm{e}^{-i\pi/2}$ og $\beta = \sqrt{2}$.

5. I denne oppgaven skulle vi bruke flerskalautvikling til å løse startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \varepsilon\cos 2t\,y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad \dot{y}(0) = 0, \qquad (40)$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

(a) Vi skriver $y(t) = y(t,\tau)$ med $\tau = \varepsilon t$, slik at $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}$. Da må $y(t,\tau)$ tilfredsstille ligningen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 1\right)y(t,\tau) = \varepsilon\cos 2t\,y(t,\tau). \qquad (41)$$

(b) Vi skriver $y(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\,y_n(t,\tau)$, og finner til orden ε^0

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right)y_0(t,\tau) = 0, \qquad (42)$$

med generell løsning

$$y_0(t,\tau) = A_+(\tau)\mathrm{e}^{it} + A_-(\tau)\mathrm{e}^{-it}, \qquad (43)$$

der $A_\pm(\tau)$ foreløbig er ubestemte funksjoner.

(c) Til orden ε^1 får vi ligningen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1\right) y_1(t,\tau) = \left(\cos(2t) - 2\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}\right) y_0(t,\tau)$$
$$= \left(\frac{1}{2}A_+ + 2iA'_-\right)\mathrm{e}^{-it} + \left(\frac{1}{2}A_- - 2iA'_+\right)\mathrm{e}^{it} + \text{ikke-sekulære ledd.} \quad (44)$$

Vi velger $A_\pm$ slik at de sekulære leddene forsvinner, dvs

$$A'_+ = -\frac{i}{4}A_-, \qquad A'_- = \frac{i}{4}A_+. \quad (45)$$

Iterert fås ligningen

$$A''_+ - \frac{1}{16}A_+ = 0 \quad (46)$$

som er lett å løse. Den generelle løsningen til (45) blir

$$A_+ = C_+\mathrm{e}^{\tau/4} + C_-\mathrm{e}^{-\tau/4}, \qquad A_- = iC_+\mathrm{e}^{\tau/4} - iC_-\mathrm{e}^{-\tau/4}. \quad (47)$$

(d) Den generelle nullte ordens flerskalaløsningen blir

$$\begin{aligned} y_0(t,\tau) &= C_+\mathrm{e}^{\tau/4}\left(\mathrm{e}^{it}+i\mathrm{e}^{-it}\right) + C_-\mathrm{e}^{-\tau/4}\left(\mathrm{e}^{it}-i\mathrm{e}^{-it}\right) = \\ & C_+\mathrm{e}^{i\pi/4}\mathrm{e}^{\tau/4}\left(\mathrm{e}^{i(t-\pi/4)}+\mathrm{e}^{-i(t-\pi/4)}\right) + \\ & C_-\mathrm{e}^{-i\pi/4}\mathrm{e}^{-\tau/4}\left(\mathrm{e}^{i(t+\pi/4)}+\mathrm{e}^{-i(t+\pi/4)}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Denne løsningen må oppfylle startbetingelsene til orden ε^0. Dette skjer for

$$C_+\mathrm{e}^{i\pi/4} = C_-\mathrm{e}^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

slik at den endelige nullte ordens løsningen blir

$$y_0(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{\tau/4}\cos(t-\pi/4) + \mathrm{e}^{-\tau/4}\cos(t+\pi/4)\right]. \quad (49)$$