IKKE-LINEÆR DYNAMIKK

Kont. eks. 24. 8. 1992

Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Schamel-likningen er $16\, u_t + 20(u^{3/2})_x + u_{xxx} = 0$, og $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ gir

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u\, dx = \left[-\frac{20}{16}\, u^{3/2} - u_{xx}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

b) $u(x,t) = u(x-ct)$ innsatt gir

$$-16cu' + 20\,(u^{3/2})' + u''' = 0$$ som integres til

$$-16cu + 20\,u^{3/2} + u'' = A$$

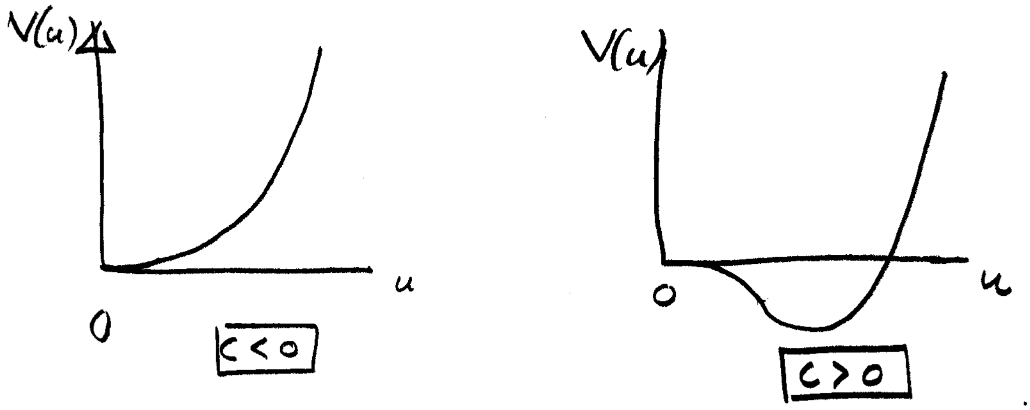
Multiplikasjon med u' og integrasjon gir

$$-8c\,u^2 + 8\,u^{5/2} + \tfrac{1}{2}u'^2 = Au + E,$$

eller

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2}u'^2 + V(u) = E}} \quad ; \quad \underline{\underline{V(u) = 8\,u^{5/2} - 8c\,u^2 - Au}}$$

c) Formen ovenfor viser at vi har et endimensjonalt mekanisk problem med u som stedsvariabel og argumentet ξ til $u(\xi)$ som tidsvariabel. Skal vi ha $u(\xi \to \pm\infty) = 0$ må origo være et likevektspunkt, $V'(u) = 0 \Rightarrow \underline{A = 0.}$ For store u dominerer $8u^{5/2}$, for små u dominerer $-8cu^2$, så potensialet ser slik ut



Så for $\underline{\underline{c>0}}$ kan solitære-bølger med $u(x\to\pm\infty)$ eksistere. Det tilsvarer $\underline{\underline{A=E=0}}$, partikkelen beveger seg fra $u=0$ til u_{max} og tilbake igjen med energi lik $E=V(0)=0$. Da $c>0$ er dette en $\underline{\underline{\text{høyre løpende}}}$ solitær bølge.

Pulshøyden $u_{max}>0$ tilfredsstilles $V(u_{max})=0$, som gir $\underline{\underline{u_{max}=c^2}}$.

d) Den eksplisitte form finnes av $\frac{1}{2}u'^2+V(u)=0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = 8cu^2 - 8u^{5/2}$$

Med $u(\xi)=c^2\,y(\xi)^{-4}$ fås $u'=-4c^2y^{-5}\cdot y'$

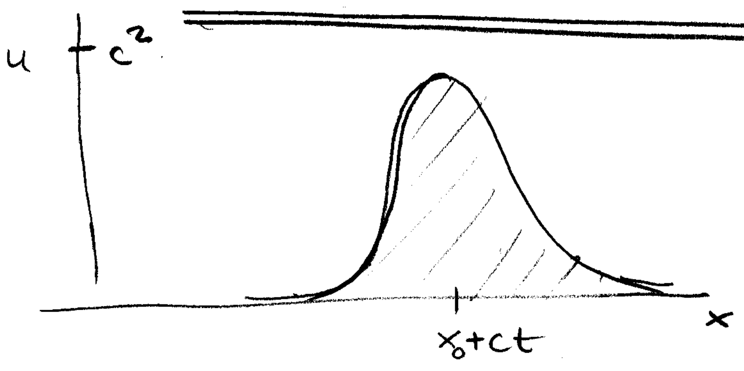
$$8c^4y^{-10}y'^2 = 8c^5y^{-8} - 8c^5y^{-10}$$

$$y'^2 = c(y^2-1)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \sqrt{c}\,d\xi \Rightarrow \cosh^{-1}y = \sqrt{c}\,(\xi-\text{konstant}) = \sqrt{c}\,(x-x_0-ct)$$

Innsatt

$$\underline{\underline{u(x-ct) = \frac{c^2}{\cosh^4\left[\sqrt{c}\,(x-x_0-ct)\right]}}}$$



Vi ser at $u_{max}=c^2$, som vi fant under c).

Oppgave 2

a) Med de gitte betingelser blir funksjonen B i Gel'fand–Levitan–Marchenko-likningen

$$B(z) = a^2 e^{-\varkappa x},$$

og integrallikningen blir

$$K(x,y) + a^2 e^{-\varkappa(x+y)} + a^2 \int_x^\infty K(x,z)\, e^{-\varkappa(z+y)}\,dz = 0$$

Multiplikasjon med $e^{\varkappa y}$ gir

$$e^{\varkappa y} K(x,y) + a^2 e^{-\varkappa x} + a^2 \int_x^\infty K(x,z)\, e^{-\varkappa z}\,dz = 0$$

De to siste ledd er uavhengige av y, da er også første ledd det:

$$e^{\varkappa y} K(x,y) \equiv F(x)$$

Innsatt for K:

$$0 = F(x) + a^2 e^{-\varkappa x} + a^2 \int_x^\infty F(x)\, e^{-2\varkappa z}\,dz = F(x) + a^2 e^{-\varkappa x} + \frac{a^2 F(x)}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}$$

Løst mhp F:

$$F(x) = -\frac{a^2 e^{-\varkappa x}}{1 + \frac{a^2}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}}$$

$$K(x,x) = e^{-\varkappa x} F(x) = -\frac{a^2}{e^{2\varkappa x} + a^2/2\varkappa}$$

Potensialet:

$$u(x) = -2\frac{d}{dx} K(x,x) = \frac{4a^2 \varkappa e^{2\varkappa x}}{\left(e^{2\varkappa x} + a^2/2\varkappa\right)^2}$$

Med å skrive ut t-avhengigheten eksplisitt vha

$$a(t) = a(0)\, e^{4\varkappa^3 t}$$

fås

$$u(x) = -8\varkappa^2 \frac{\frac{a(0)^2}{2\varkappa} e^{2\varkappa x + 8\varkappa^3 t}}{\left(e^{2\varkappa x} + \frac{a(0)^2}{2\varkappa} e^{8\varkappa^3 t}\right)^2}$$

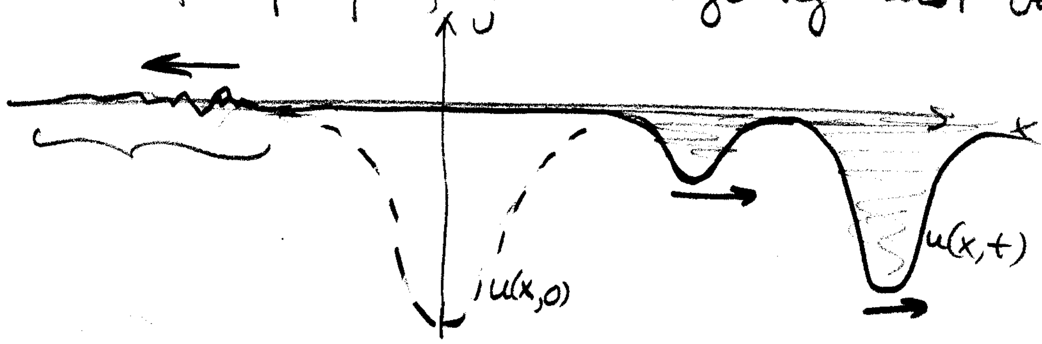
Kan skrives litt penere ved å sette $\frac{a(0)^2}{2\varkappa} \equiv e^{2\varkappa x_0}$:

$$u(x) = -8\varkappa^2 \frac{1}{\left[e^{\varkappa(x - x_0 - 4\varkappa^2 t)} + e^{-\varkappa(x - x_0 - 4\varkappa^2 t)}\right]^2}$$

$$= -\frac{2\varkappa^2}{\cosh^2\left[\varkappa(x - x_0 - 4\varkappa^2 t)\right]}$$

Hastighet er $c = 4\varkappa^2 = 4|\lambda|$

b) To bundne tilstander i det kvantemekaniske problemet (alltid med ulike egenverdier) tilsvarer to solitoner. Disse beveger seg mot høyre med ulike hastigheter. I tillegg fås en bakgrunnsdel (dispersive del), da potensialet ikke er refleksjonsfritt, som beveger seg mot venstre:



Mot høyre/venstre betyr vanligvis raskere/langsommere enn fasehastigheten i det lineariserte problem.

c) KdV-likningen er en god beskrivelse for overflatebølger som er svakt ikke-lineære og svakt dispersive:

amplitude ≪ vanndybde ≪ karakteristisk bølgelengde

Oppgave 3

a) Nær origo er

$$\dot{x} = -y + \tfrac{1}{2}x$$
$$\dot{y} = x + \tfrac{1}{2}y$$

til lineær orden. Dvs $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$. A's egenverdier ~~λ~~ λ er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -1 \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \tfrac{1}{2} \pm i$$

Da $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ er origo **ustabilt.** (frastøtende)

[Alternativt settes $x = c_1 e^{\lambda t}$; $y = c_2 e^{\lambda t}$ som gir $\lambda c_1 = -c_2 + \frac{1}{2}c_1$ og $\lambda c_2 = c_1 + \frac{1}{2}c_2$ som gir $\lambda = \frac{1}{2} \pm i$, og $\frac{c_1}{c_2} = \pm i$ (bortsett fra trivialløsningen $c_1 = c_2 = 0$.)]

Flere likevektspunkter (x_0, y_0)? De må isåfall tilfredsstille

$$-y + (1 - x^2 - y^2)x - \tfrac{1}{2}x = 0$$
og
$$x - \tfrac{1}{2}y + (1 - x^2 - y^2)y = 0,$$

Multiplikasjon av øverste likning med y, nederste med x og subtraksjon gir $\underline{-x^2 - y^2 = 0}$ ɔ: bare $\underline{x = y = 0}$.

b) Av utgangslikningene fås

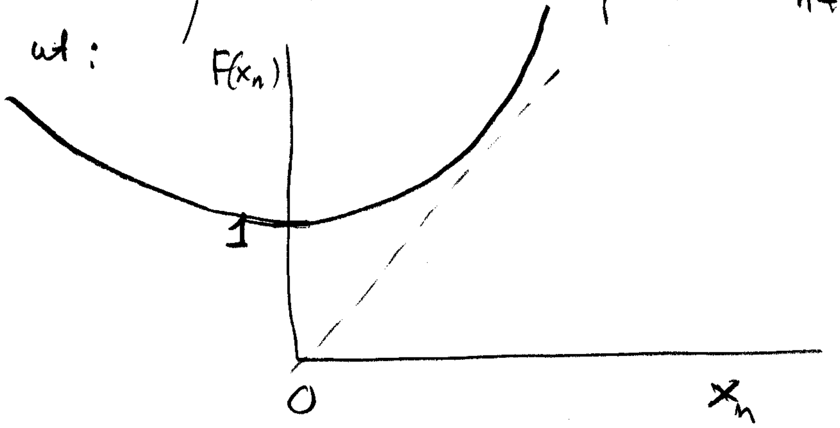
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2+y^2)(\tfrac{1}{2} - x^2 - y^2).$$

For $x^2 + y^2 \gtreqless 1/2$ er $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) \lesseqgtr 0$,

altså er sirkelen $\boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}}$ en **stabil** grensesyklus. Rimelig da at origo er frastøtende, som vi fant under a).

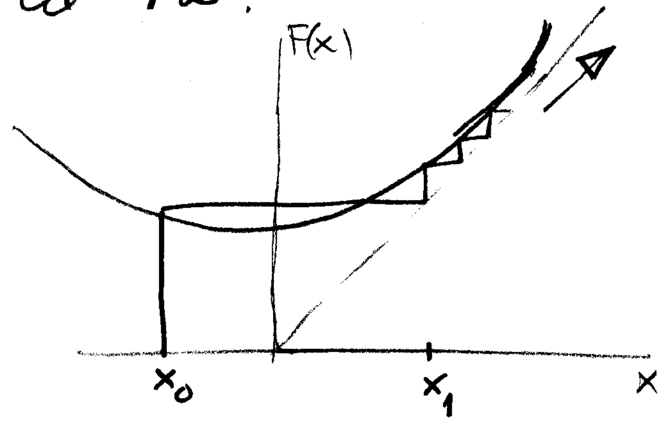
Oppgave 4

a) For $\mu < -\frac{1}{4}$ ser iterasjonen $x_{n+1} = F(x_n)$ slik ut:



Det ser en f.eks. ved å bemerke at tangering med $F = x$ fås for μ, x_0 som tilfredsstiller $F'(x_0) = 1$ og $F(x_0) = x_0$): $-2\mu x_0 = 1$ og $x_0 = 1 - \mu x_0^2$ som gir $\underline{\underline{x_0 = 2, \mu = -\frac{1}{4}}}$, og mindre verdier av μ "løfter" kurven.

Det er klart at enhver iterasjon vil divergere til $+\infty$:



b) Fikspunkter: $F(x) = x \Rightarrow$

$$1 - \mu x^2 = x$$

$$\underline{\underline{x^* = -\frac{1}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{4\mu^2}}}}$$

Her er $x_-^* = -\frac{1}{2\mu} - \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{4\mu^2}} < -\frac{1}{2\cdot 2} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2^2}} = -1$

for $0 < \mu < 2$. Da $|x_{n+1}| < 1$ for $|x_n| < 1$ og $0 < \mu < 2$ vil banen holde seg i $(-1, +1)$, og x_-^* være irrelevant.

Det relevante fikspunktet er

$$x^* = -\frac{1}{2\mu} + \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{4\mu^2}}.$$

Dette er stabilt når $|F'(x^*)| < 1$. Da $F'(x^*) = -2\mu x^* = 1 - \sqrt{4\mu+1}$ ser vi at $|F'(x^*)| < 1$ for $\underline{\underline{\mu < \mu_1 = \frac{3}{4}}}$.

c) Periode to:

$$x_1 = 1 - \mu x_2^2$$
og
$$x_2 = 1 - \mu x_1^2, \quad \text{med } x_1 \neq x_2.$$

Subtraksjon gir

$$x_1 - x_2 = \mu(x_1^2 - x_2^2)$$

Divisjon med $x_1 - x_2 (\neq 0)$ gir

$$\underline{\underline{1 = \mu(x_1 + x_2)}} \quad \text{qed}$$

d) Stabil periode 2 når

$$\left| \left[\frac{d}{dx} F^{(2)}(x)\right]_{x=x_1} \right| < 1$$

$$|(-2\mu x_1)(-2\mu x_2)| < 1$$

$$\underline{\underline{|x_1 x_2| < 1/4\mu^2}}$$

Her er $x_1 + x_2 = 1/\mu$ og $x_2 = 1 - \mu x_1^2 \Rightarrow$

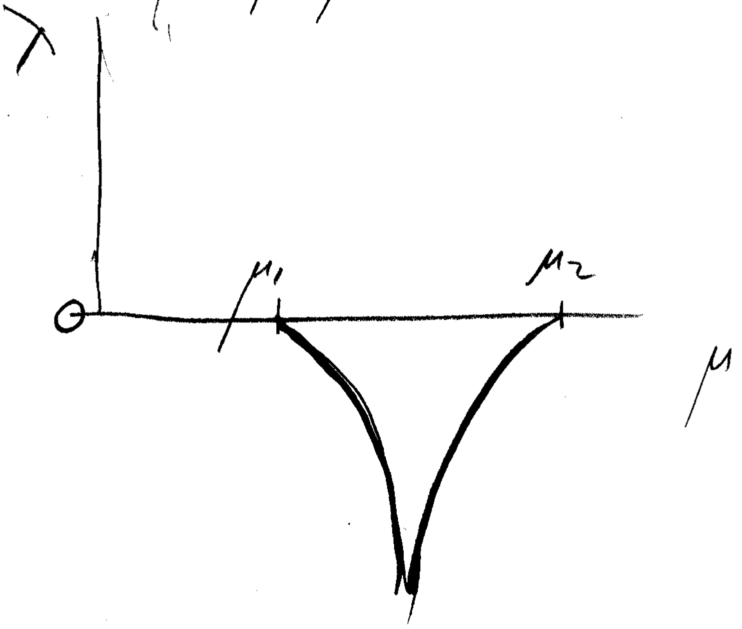
$$1/\mu - x_i = 1 - \mu x_i^2$$

$$x_i^2 - \frac{1}{\mu} x_i + \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} = 0$$

Produktet av røttene er $\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}$ og $\left|\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\right| < \frac{1}{4\mu^2}$ gir $|1-\mu| < \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{3}{4} < \mu < \frac{5}{4}}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_2 = \frac{5}{4}}}$

e) For $\mu_1 < \mu < \mu_2$ er Liapunov-eksponenten <u>negativ</u>.



$\lambda(\mu_i) = 0$ for $i = 1, 2$.

f) I en periodedoblingskaskade vil, ved økning av kontrollparameteren (μ), fåes en ∞ rekke verdier $\mu_1, \mu_2, \ldots$ der en stabil ~~periodisk~~ periodisk bane mister stabiliteten og en ny stabil bane med den dobbelte periode oppstår. Verdiene konvegerer mot en grenseverdi μ_∞ som $\mu_\infty - \mu_n \propto \delta^{-n}$ asymptotisk.