

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

P. C. Hemmer

Tel. 3648

EKSAMEN I FAG 74993 IKKE-LINEÆR DYNAMIKK

Onsdag 8. juni 1994

kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel formler er gitt i eget vedlegg.

Oppgave 1

Ildfluehanner viser en forbløffende synkroniseringsevne. I enkelte områder i det sørøstlige Asia samler tusenvis seg i trær, og slår lyset på og av samtidig, med en naturlig periode $2\pi/\omega$ på ca. 0.9 sekund.

F. E. Hanson studerte effekten eksperimentelt ved å utsette en ildflue for en ytre påvirkning i form av et periodisk lyssignal med frekvens Ω . Han fant at dersom denne frekvensen lå i et visst intervall rundt ω ,

$$\omega - \omega_1 \leq \Omega \leq \omega + \omega_1, \quad (1)$$

så ville ildfluens respons følge det påtrykte signalet, men dersom påvirkningen var for rask eller for langsom, så var ildfluen ute av stand til å holde følge. I denne oppgaven betraktes de eksperimentelt bestemte verdiene ω og ω_1 som kjente.

Ermentrout og Rinzel modellerte disse observasjonene ved å anta at fasen φ for ildfluens eget signal endrer seg med tida som

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + K \sin(\Theta - \varphi), \quad (2)$$

der $\Theta = \Omega t$ er fasen til påvirkningen. K er et mål for ildfluens evne til å modifisere sin instantane frekvens. Her er $K \geq 0$, fordi hvis fasen til stimulus-signalet ligger *foran* fasen til ildfluens signal vil ildfluen "skynde på".

Vi antar at modelleringen (2) er gyldig, og studerer dynamikken til faseforskjellen

$$\alpha = \Theta - \varphi.$$

Spesielt vil vi undersøke eventuelle fikspunkter (likevektspunkter) α^* (i intervallet $[-\pi, \pi)$, f.eks.) for faseforskjellen.

a) Ta først $\Omega = \omega$, slik at det påtrykte lyssignal har ildfluens naturlige frekvens. Hva er det *stabile* (attraktive) fikspunkt α^* for faseforskjellen i dette tilfellet? (Kommenter resultatet med ord.)

b) Ta så $\Omega \neq \omega$. I hvilket frekvensintervall kan en oppnå at faseforskjellen har et stabilt fikspunkt? Bestem modellparameteren K ved kjente størrelser.

For hvilken drivfrekvens Ω (uttrykt ved ω og ω_1) vil faseforskjellen mellom påtrykt signal og respons være $-\pi/2$ etter at transienter har dødd bort?

c) For $\Omega > \omega + \omega_1$ vil faseforskjellen α øke hele tiden. Vis at i løpet av tida

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - K^2}}$$

øker faseforskjellen med beløpet 2π . (Faseforskjellene ved t og $t + \tau$ er naturligvis fysisk sett ekvivalente).

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på Korteweg-de Vries-likningen i følgende dimensjonsløse form:

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0.$$

a) Vis at for en lokalisert puls er

$$C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx$$

og

$$C_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2 dx$$

bevegelseskonstanter.

b) Vis at tyngdepunktet

$$X = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x u(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx}$$

for en lokalisert bølgepuls beveger seg med konstant hastighet.

c) En startpuls $u(x, 0)$ som i det assosierte stasjonære Schrödingerlikning-problemet er refleksjonsløst utvikler seg etter lang tid til to solitoner av formen

$$u_i(x, t) = \frac{3c_i}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c_i}(x - x_i^0 - c_it)]}$$

Bestem solitonenes hastigheter c_1 og c_2 (uttrykt ved $u(x, 0)$).

d) Korteweg-de Vries-likningen kan bl.a. beskrive overflatebølger når en inkompressibel væske strømmer virvelfritt. Under hvilke fysiske betingelser er dette en god beskrivelse? (Svar kort.)

Oppgave 3

a) For mange éndimensjonale iterasjoner (som den logiske avbildning) opptrer periodedoblingskaskader. Forklar kort hva en periodedoblingskaskade er. Hva innebærer det i denne sammenheng at to ulike iterasjoner er i samme universalitetsklasse?

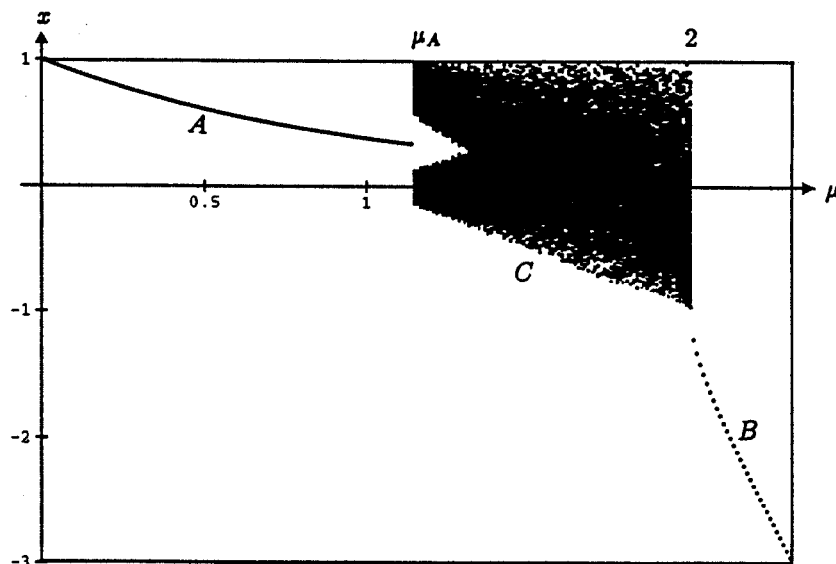
b) Iterasjonen

$$x_{n+1} = F(x_n) = 1 - \mu\sqrt{|x_n|},$$

med μ som kontrollparameter, er av en type der periodedoblingskaskader *ikke* opptrer. Denne skal vi nå studere.

Argumenter først (grafisk eller analytisk) for at "banen" x_1, x_2, x_3, \dots for denne iterasjonen aldri divergerer, uansett verdiene på μ og x_1 .

c) I figuren er vist iterasjonens attraktor som funksjon av kontrollparameteren i intervallet $0 < \mu < 2.3$, når en starter med $x_1 = 0.5$. . Figuren er fremkommet ved at μ er øket i skritt på 0.01, og for hver μ -verdi er verdiene $x_{201}, x_{202}, \dots, x_{499}, x_{500}$ plottet inn.



Hva representerer kurve A i figuren? (Bevis for attraktortype fordres ikke.) Vis at likningen for A er

$$x = 1 + \frac{1}{2}\mu^2 - \mu\sqrt{1 + \frac{1}{4}\mu^2}.$$

Hva er verdiene μ_A og x_A for høyre endepunkt av A?

d) Hva representerer kurve B i figuren (for $\mu > 2$)? (Bevis for attraktortype fordres ikke.) Finn likningen for B.

e) For kontrollparametere i intervallet $(\mu_A, 2)$ er iterasjonen kaotisk. Hva er likningen for nedre begrensingslinje C i figuren?

f) Definer Lyapunoveksponenten λ for en generell éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$. Vis at Lyapunoveksponenten kan uttrykkes som

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(x_i)|.$$

g) For iterasjonen i punkt b) er Lyapunoveksponenten en funksjon av kontrollparameteren, $\lambda = \lambda(\mu)$. Hva kan du si direkte uten regning om fortegnet til λ i de ulike områdene på figuren, og hva er $\lambda(\mu_A)$?

h) Det eksplisitte uttrykk for λ for kurve A er

$$\lambda = -\ln \left(\sqrt{4\mu^{-2} + 1} - 1 \right).$$

Vis det.

Vi ser at $\lambda(0) = -\infty$. Kommentér denne verdien.

i) Den asymptotiske fordeling av banepunktene for den siste verdien av kontrollparameteren i det kaotiske området, $\mu = 2$, er lik

$$\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$$

for x i intervallet $(-1, +1)$, og null utenfor. (En ser i figuren en antydning av at de 300 banepunktene er tynnere fordelt nær $x = 1$ enn nær $x = -1$.)

Benytt Perron-Frobenius-likningen

$$\int \rho(x) \delta[y - F(x)] dx = \rho(y)$$

til å verifisere at ovenstående asymptotiske fordeling er den invariante fordeling for iterasjonen.

Bruk tilslutt den invariante fordeling $\rho(x)$ til å beregne Lyapunoveksponenten $\lambda(2)$.

Vedlegg

Noe av nedenforstående kan du kanskje få bruk for.

δ -funksjonens egenskaper

$$\delta[f(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|},$$

summert over alle nullpunktene x_n for $f(x)$.

Integraler

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \cosh^{-1} x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$$

$$\int_0^{2\pi} (A + B \sin x) dx = 2\pi A$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{A + B \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} \quad (|B| < A)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} = 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^4 x} = \frac{4}{3}$$