NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
P. C. Hemmer
Tel. 93648

EKSAMEN I FAG 74993 IKKELINEÆR DYNAMIKK

Torsdag 9. mai 1996
kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

To arter, her kalt kaniner og sauer, konkurrerer om et begrenset beite. Populasjonene av de to artene ved tida t er $x(t)$ (kaniner) og $y(t)$ (sauer). Populasjoner som er så små at det er nok mat vil vokse eksponensielt med ulike vekstrater (større for kaniner enn for sauer), men denne veksten vil reduseres for større populasjoner på grunn av de begrensede matressurser.

En meget enkel modell som illustrerer dette er følgende ikkelineære dynamiske system:

$$\frac{dx}{dt} = x\,(3 - x - 2y) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = y\,(2 - x - y) \tag{2}$$

(Komplikasjoner som rovdyr, sykdom, årstidsvariasjoner og alternative ressurser er det sett bort fra.)

a) Finn alle fikspunktene (likevektspunktene) (x^*, y^*) for systemet.

b) Klassifisér fikspunktene med hensyn til stabilitet.

c) Nå skal vi se på strømningen i faserommet for dette systemet, som ikke har noen grensesykler. Hvorledes strømmer fasepunktene langs x-aksen og langs y-aksen? Hva skjer for store avstander fra origo? Skissér rent kvalitativt strømningen i faserommet, og vis på skissen nedslagsfeltene til de stabile fikspunktene.

Biologer har formulert et prinsipp om konkurranseutelukkelse, som sier at to arter som konkurrerer om samme begrensede ressurs ikke kan sameksistere. Er resultatene for ovenstående enkle modell i overensstemmelse med dette prinsippet?

Oppgave 2

a) La $u(x,t)$ tilfredsstille Korteweg-de Vries-likningen i følgende dimensjonsløse form:

$$u_t - 6u\, u_x + u_{xxx} = 0. \tag{3}$$

Bevis at tyngdepunktet for en lokalisert puls,

$$X_T = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, u(x,t)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx},$$

beveger seg med konstant fart.

b) Vi vil la $u(x,t)$ fra punkt a) være potensial og λ egenverdi for eventuelle bundne tilstander i den stasjonære Schrödingerlikningen

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u\,\psi = \lambda\,\psi. \tag{4}$$

La et startprofil $u(x,0)$ utvikle seg ifølge KdV-likningen til $u(x,t_1)$ etter tida t_1, og la oss tenke oss at Schrödingerproblemet løst for begge potensialer $u(x,0)$ og $u(x,t_1)$. Hva har resultatene felles?

Potensialet

$$u(x) = -\frac{m(m+1)\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x)} \tag{5}$$

i Schrödingerlikningen (4) har m diskrete egenverdier når m er et helt positivt tall, og $[m]+1$ diskrete egenverdier når m ikke er heltallig. Her betyr $[m]$ heltallsdelen av den positive størrelsen m. Dersom m er heltallig ($[m]=m$) er potensialet *refleksjonsløst*, ellers ikke. (Disse egenskapene skal du ikke vise!)

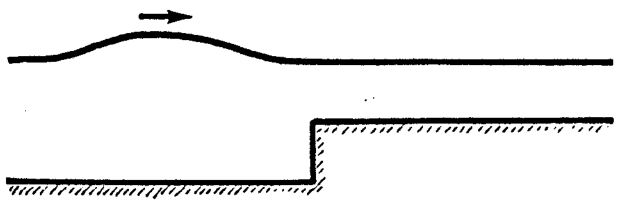
Solitære bølger for KdV-likningen (3) er av formen

$$u(x,t) = \frac{A}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0 - ct)]}.$$

Benytt den oppgitte informasjon for potensialet (5) til å bestemme amplituden A.

c) Korteweg-de Vries-likningen kan bl.a. beskrive overflatebølger når en inkompressibel væske strømmer virvelfritt i en kanal med horisontal bunn. Under hvilke betingelser er dette en god beskrivelse? (Svar kort.)

d) En solitær bølge med liten bølgehøyde forplanter seg i en kanal. Fra et bestemt sted av blir kanalen grunnere idet dybden reduseres til det halve (se figur).



Anta at den solitære bølgen uten å endre form kommer over ujevnheten i bunnen, og starter så på den grunnere kanalen. Hvorledes venter du at bølgeprofilet, kvalitativt sett, ser ut ved senere tidspunkt? (Bruk at avstander, både i horisontal og vertikal retning, skalerer med kanaldybden. Dette er kommentert i vedlegget.)

Oppgave 3

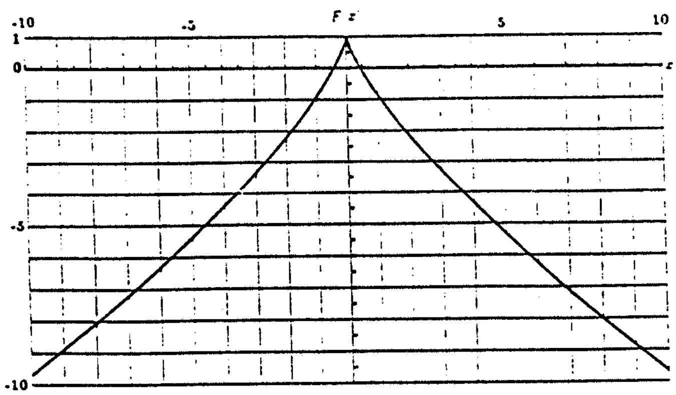
a) Definer Lyapunoveksponenten λ for en generell éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$, med gitt x_1. Vis at Lyapunoveksponenten kan uttrykkes som

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |F'(x_i)|.$$

b) For en éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$ er

$$F(x) = 1 - 1.9\,|x|^{\frac{3}{4}},$$

skissert i figuren.



Tre ulike baner for denne iterasjonen starter slik:

Bane a: $x_1 = 0$
Bane b: $x_1 = 5$
Bane c: $x_1 = 10$

Angi for hver bane den tilhørende attraktortype. Begrunn svaret.

c) Angi fortegnet for Lyapunoveksponenten for hver av de tre banene i punkt b).

Beregn for bane c den numeriske verdi av Lyapunoveksponenten. Det kreves ikke større nøyaktighet enn 1%.

Oppgave 4

Iterasjonen

$$\phi_{n+1} = F(\phi_n) = \phi_n + \Omega + kf(\phi_n)$$

beskriver stroboskopiske observasjoner av fasen ϕ til en oscillator som utsettes for en periodisk påvirkning. Observasjonene er tatt med påvirkningens periode. Ω er forholdet mellom perioden av påvirkningen og oscillatorens periode (svingetid).

Fasen ϕ for oscillatoren er definert slik at ϕ og $\phi + 1$ er samme fysiske tilstand. Vi forutsetter at vekselvirkningsfunksjonen $f(\phi)$ oscillerer omkring null slik at

$$f(\phi + \tfrac{1}{2}) = -f(\phi).$$

Maksimalverdien av $|f|$ er 1, slik at k måler maksimalstyrken av vekselvirkningen mellom oscillatoren og den periodiske påvirkningen. Vi forutsetter at k er så liten at $F(\phi)$ er en monotont økende funksjon av ϕ.

Dersom Ω avviker litt fra 1,

$$1 - ak \leq \Omega \leq 1 + ak, \tag{6}$$

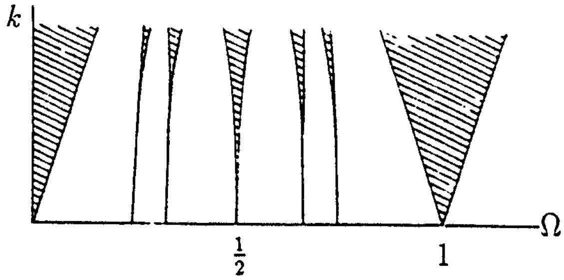
vil oscillatoren (etter at transienter er dødd bort) være fullstendig synkronisert med påvirkningen. Her er a en foreløpig ubestemt numerisk konstant.

Og dersom Ω avviker litt fra $\frac{1}{2}$,

$$\tfrac{1}{2} - bk^2 \leq \Omega \leq \tfrac{1}{2} + bk^2, \tag{7}$$

vil forholdet mellom påvirkningens og oscillatorens svingetider kunne låses til $\frac{1}{2}$ (igjen etter at transienter er dødd bort). Uttrykket (7), der b er en numerisk konstant, er en approksimasjon for $k \ll 1$.

Figuren viser skravert de områdene, Arnol'd-tungene, der svingetidsforholdet er låst til ovenstående verdier 1 og $\frac{1}{2}$ og til noen andre rasjonale forhold.



a) Bestem konstanten a i likning (6).

b) Vis at når Ω avviker fra $\frac{1}{2}$ med beløp av orden k^2 eller mindre, vil den itererte transformasjonen $F(F(\phi))$ til orden k^2 være gitt ved

$$F(F(\phi)) = \phi + 2\Omega - k^2 f(\phi) f'(\phi) + \mathcal{O}(k^3).$$

Benytt dette til å beregne konstanten b i Arnol'd-tungen (7) for det spesielle tilfellet at

$$f(\phi) = \sin(2\pi\phi).$$

Vedlegg

Skalering av KdV-likningen for kanalbølger

I forelesningene ble det gitt en perturbativ utledning av KdV-likningen for overflatebølger i en kanal med vanndybde h. Uttrykt ved de opprinnelige fysiske størrelsene tilfredsstiller $s(x,t)$ (høyde over uforstyrret vannspeil) likningen

$$\frac{1}{\sqrt{gh}}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3}{2h}s\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0. \tag{8}$$

Ved å skalere alle lengder med h, dvs innføre

$$s/h \equiv \hat{s} \tag{9}$$

og

$$x/h \equiv \hat{x}, \tag{10}$$

får vi likningen i dimensjonsløse variable:

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial \hat{x}} + \frac{3}{2}\hat{s}\frac{\partial \hat{s}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \hat{s}}{\partial \hat{x}^3} = 0,$$

der $t\sqrt{g/h} \equiv \hat{t}$. Ved en Galileitransformasjon, og ved å skalere med rent numeriske faktorer, kan en få KdV-likningen på en av de vanlige formene. For vårt formål er det uviktig. det er skaleringene (9) og (10) med kanaldybden som er av betydning her.