Fag DIF4943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 12.1.1999

1. I denne oppgaven skulle vi gjøre en lokal analyse av differensialligningen

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{xdx} + \frac{1}{x^4}\right] y(x) = 0. \tag{1}$$

(a) Ligning (1) har ett rang 2 irregulært singulært punkt i $x = 0$ og ett regulært singulært punkt i $x = \infty$, og ingen andre singulære punkter.

(b) For å finne de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $y(x)$ når

i. $x \to 0$
innfører vi $y = \mathrm{e}^S$ og finner

$$S'^2 + S'' + \frac{1}{x}S' + \frac{1}{x^4} = 0. \tag{2}$$

Dominerende balanse er er gitt ved $S'^2 \sim -x^{-4}$, dvs.

$$S' = \pm\frac{i}{x^2} + S_1'.$$

Gjeninnsatt i (2) gir dette

$$\pm 2ix^{-2}S_1' \mp ix^{-3} + \mathcal{O}(x^{-2}) = 0,$$

dvs. $S_1' = \frac{1}{2x} + \cdots$. Etter integrasjon og eksponentiering gir dette

$$y(x) = \sqrt{x}\left\{A_1 \mathrm{e}^{i/x}\left[1 + \mathcal{O}(x)\right] + A_2 \mathrm{e}^{-i/x}\left[1 + \mathcal{O}(x)\right]\right\}. \tag{3}$$

ii. $x \to 1$
benytter vi at løsningen har en konvergent rekkeutvikling i dette punktet, slik at

$$y(x) = B_0 + B_1(x-1) + \mathcal{O}((x-1)^2). \tag{4}$$

iii. $x \to \infty$
benytter vi at $x = \infty$ er et regulært singulært punkt, og gjør ansatzen $y = x^\nu + \cdots$. Dette fører til index-ligningen $\nu^2 = 0$, slik at

$$y(x) = C_0 + C_1 \log x + \mathcal{O}(x^{-1}). \tag{5}$$

Kommentar: Ved å innføre $u = x^{-1}$, $Y(u) = y(x)$ transformerer (1) over på Bessel-ligningen

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{d}{udu} + 1\right] Y(u) = 0, \tag{6}$$

med generell løsning $Y(u) = D_1 J_0(u) + D_2 Y_0(u)$.

2. I denne oppgaven skulle vi analysere integralet

$$\mathcal{Z}_\nu(\beta) \equiv \int_0^\infty k^\nu \, dk \, \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{k^2+1}} \tag{7}$$

(a) når $\beta \to 0^+$ med $\nu > 0$ fast:
Hvis vi setter $\beta = 0$ vil integralet divergere for store k, så hovedbidraget kommer fra store k. Vi kan derfor tilnærme $\sqrt{k^2+1} = k + \frac{1}{2k} + \cdots$, og får

$$Z_\nu(\beta) = \int_0^\infty k^\nu \, dk \, \mathrm{e}^{-\beta k}\left(1 - \frac{\beta}{2k} + \cdots\right) = \Gamma(1+\nu)\beta^{-1-\nu}\left[1 + \mathcal{O}(\beta)\right]. \tag{8}$$

(b) når $\beta \to \infty$ med $\nu > -1$ fast:
Når β er stor blir eksponentialfunksjonen raskt liten når k øker. Så vi kan rekkeutvikle $\sqrt{k^2+1} = 1 + \frac{1}{2}k^2 + \cdots$, og får

$$Z_\nu(\beta) = \mathrm{e}^{-\beta} \int_0^\infty k^\nu \, dk \, \mathrm{e}^{-\beta k^2} \left(1 + \mathcal{O}(\beta k^4)\right) =$$
$$2^{(\nu-1)/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \beta^{(\nu+1)/2} \, \mathrm{e}^{-\beta} \left[1 + \mathcal{O}(\beta^{-1})\right] \tag{9}$$

(c) når $\nu \to \infty$ med $\beta > 0$ fast:
Maksimum for integranden vil forskyves mot store k når ν øker, så hovedbidraget til integralet vil komme fra (et skarpt maksimum i integranden ved) store k. Svaret er derfor gitt som i ligning (8), men hvor vi i tillegg kan gjøre stor-ν utviklingen for $\Gamma(1+\nu)$, dvs.

$$Z_\nu(\beta) \approx \sqrt{2\pi\nu} \, \nu^\nu \, \mathrm{e}^{-\nu} \, \beta^{-1-\nu}. \tag{10}$$

(d) når $\nu \to \infty$, $\beta =\!\to \infty$ med $\zeta = \beta/\nu > 0$ fast:
Vi innfører

$$\phi(k) = \log k - \zeta\sqrt{k^2+1}, \tag{11}$$

slik at integralet kan skrives

$$Z_\nu(\nu\zeta) = \int_0^\infty dk \, \mathrm{e}^{\nu\phi(k)}.$$

$\phi(k)$ har maksimum ved $k = k_m$, der

$$\phi'(k_m) = \frac{1}{k_m} - \frac{\zeta k_m}{\sqrt{k_m^2+1}} = 0,$$

dvs.

$$k_m^2 = \frac{1 + \sqrt{1+4\zeta^2}}{2\zeta^2}. \tag{12}$$

Da er

$$\phi''(k_m) = -k_m^{-2} - \zeta\left(k_m^2+1\right)^{-3/2} = -\frac{1+\zeta^2 k_m^4}{\zeta^2 k_m^6} \tag{13}$$

Vi kan da tilnærme integralet som

$$Z_\nu(\nu\zeta) \approx \mathrm{e}^{\nu\phi(k_m)} \int dk \, \mathrm{e}^{\nu\phi''(k_m)(k-k_m)^2/2} = \mathrm{e}^{\nu\phi(k_m)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\nu\phi''(k_m)}}. \tag{14}$$

Merk at vi kan skrive $\phi(k_m) = \log k_m - \zeta^2 k_m^2$ fordi $\sqrt{k_m^2+1} = \zeta k_m^2$. Da kan vi skrive

$$Z_\nu(\nu\zeta) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \left(\frac{\zeta^2 k_m^6}{1+\zeta^2 k_m^4}\right)^{1/2} k_m^\nu \, \mathrm{e}^{-\nu\zeta^2 k_m^2} \tag{15}$$

Det har liten hensikt å sette inn eksplisitt for k_m.

Kommentar: Integralet (7) kan uttrykkes analytisk. Ved å innføre $k = \sinh\xi$, dvs. $dk = \cosh\xi \, d\xi$ og $\sqrt{k^2+1} = \cosh\xi$, får vi

$$Z_\nu(\beta) = \int_0^\infty d\xi \cosh\xi \, \sinh^\nu\xi \, \mathrm{e}^{-\beta\cosh\xi} = -\frac{d}{d\beta}\int_0^\infty d\xi \sinh^\nu\xi \, \mathrm{e}^{-\beta\cosh\xi}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\frac{d}{d\beta}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu/2} K_{\nu/2}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu/2} K_{1+\nu/2}(\beta). \tag{16}$$

3. I denne oppgaven skulle vi se på summen

$$Z(\beta; a) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n^2+a^2}}. \tag{17}$$

(a) når $\beta \to \infty$ med $a > 0$ fast:
Når β er stor vil summanden miske raskt med voksende n, så det er tilstrekkelig å ta med det første leddet i summen

$$Z(\beta; a) \approx \mathrm{e}^{-\beta a}. \tag{18}$$

(b) når $a \to \infty$ med $\beta > 0$ fast:
Vi kan rekkeutvikle, $\sqrt{n^2 + a^2} \approx a + \frac{n^2}{2a}$. Videre vil summanden forandre seg langsomt med n, slik at vi kan erstatte summasjonen med integrasjon

$$Z(\beta; a) \approx \mathrm{e}^{-\beta a} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta n^2/2a} \approx \mathrm{e}^{-\beta a} \int_0^{\infty} dn\, \mathrm{e}^{-\beta n^2/2a} = \sqrt{\frac{\pi a}{2\beta}}\, \mathrm{e}^{-\beta a}. \tag{19}$$

(c) når $\beta \to 0^+$ med $a > 0$ fast:
Summen får sitt største bidrag fra store n, så vi kan gjøre rekkeutviklingen $\sqrt{n^2 + a^2} = n + \frac{a^2}{2n} + \cdots$. Da får vi

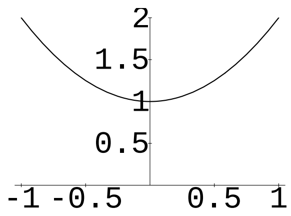
$$\begin{aligned} Z(\beta; a) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{a^2+n^2}} + \sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta n} \left(1 - \frac{\beta a^2}{2n} + \cdots\right) \\ &= N + \frac{\mathrm{e}^{-N\beta}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta}} + \frac{\beta a^2}{2} \log\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta}\right) + \mathcal{O}(\beta) && (20) \\ &= \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta a^2 \log\beta + \mathcal{O}(\beta). && (21) \end{aligned}$$

4. I denne oppgaven skulle vi se på randverdiproblemet

$$\varepsilon y''(x) + a(x) y'(x) + y(x) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 1 \tag{22}$$

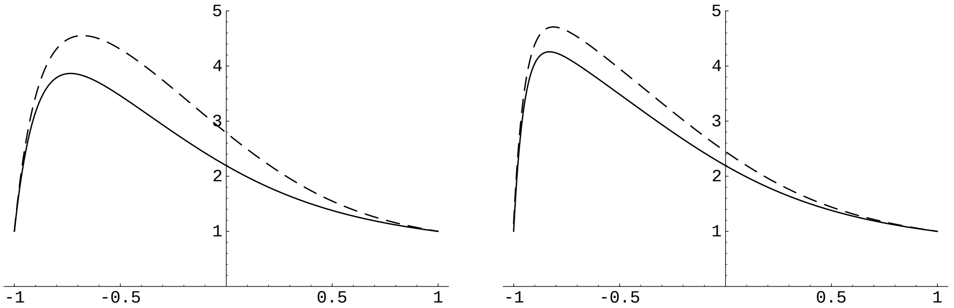
i grensen $\varepsilon \to 0^+$, dvs. finne i hvilke posisjoner får vi grensesjikt, og hvordan tykkelsen av disse skalerer med ε.

(a) Når $a(x) = 1 + x^2$, som på figuren under

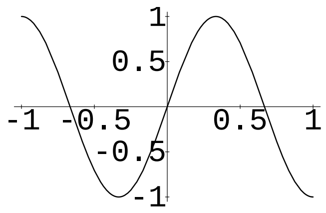


får vi etter de generelle reglene et grensesjiikt av tykkelse ε ved $x = -1$. (Siden $a(x) \neq 0$ i det aktuelle intervallet $(-1, 1)$ kan vi ikke ha indre grensesjikt. Siden videre $a(x) > 0$ er det bare konsistent å ha grensesjiktet ved venstre rand.)

Kommentar: Vi kan teste denne konklusjonen mot numerisk løsning av problemet, som i figuren under for henholdsvis $\varepsilon = 0.2$ og $\varepsilon = 0.1$. De stiplete kurvene viser den numeriske løsningen, de heltrukne kurvene viser den uniforme tilnærmingen.

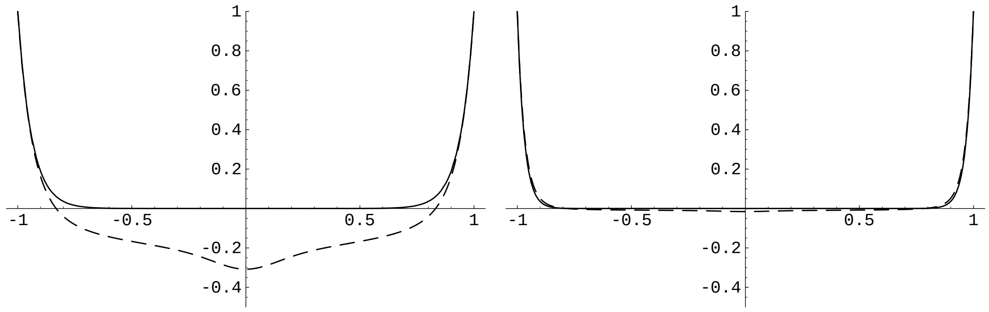


(b) Når $a(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$, som på figuren under

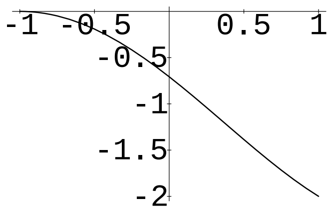


får vi etter de generelle reglene grensesjikt av tykkelse ε ved $x = -1$ og $x = 1$, med $y(x) \approx 0$ inne i intervallet $(-1, 1)$. (Siden $a(-1) > 0$ og $a(1) < 0$ er begge endepunktene tillatte posisjoner for grensesjikt av tykkelse ε. Siden $a(0) = 0$, med $a'(0) > 0$, er dette en tillatt posisjon for et indre grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$. Men siden $a(\pm\frac{2}{3}) = 0$, med $a'(\pm\frac{2}{3}) < 0$ vil vi få indre løsninger som vokser eksponensielt når $\varepsilon \to 0$,— dersom ikke $y(\pm\frac{2}{3}) \approx 0$.)

Kommentar: Vi kan teste denne konklusjonen mot en numerisk løsning av problemet, som i figuren under for henholdsvis $\varepsilon = 0.06$ og $\varepsilon = 0.03$. De stiplete kurvene viser den numeriske løsningen, de heltrukne kurvene viser den uniforme tilnærmingen. Vi må ha ganske liten ε før grensesjikt-løsningen begynner å bli god.



(c) Når $a(x) = -(1 + x)\sin[\frac{\pi}{4}(1 + x)]$, som på figuren under



kan vi etter de generelle reglene ha et grensesjikt av tykkelse ε ved $x = 1$. Punktet $x = -1$ må analyseres videre, siden $a(x)$ har en dobbeltrot der. Den ytre ligningen blir nær $x = -1$

$$y'(x) \approx \frac{4}{\pi} \frac{1}{(x+1)^2} y(x), \tag{23}$$

med løsning

$$y(x) \sim C \exp\left(-\frac{4}{\pi} \frac{1}{x+1}\right) \to 0 \text{ når } x \to -1^+. \tag{24}$$

Det er derfor ikke mulig å oppfylle venstre randbetingelse med den ytre løsningen alene, så vi må ha en form for grensesjikt ved $x = -1$ også. For å analysere oppførselen her innfører vi indre variable

$$X = (x+1)/\delta, \quad Y(X) = y(x+1),$$

og finner vi til ledende orden ved $x = -1$:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y''(X) + \delta X^2 Y'(X) + Y(X) = 0. \tag{25}$$

Vi finner at dominerende balanse kan opptre mellom første og tredje ledd i denne ligningen, med $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Dette gir en indre løsning av formen

$$Y(X) = \cos X + C \sin X, \tag{26}$$

som altså ikke svarer til et grensesjikt av konvensjonell type, men er oscillerende av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$.

Kommentar: For å analysere oscillasjons-området i mer detalj kan vi transformere ligningen til standard WKB form nær $x = -1$

$$\epsilon^2 f''(x) + Q(x) f(x) = 0,$$

ved å innføre

$$y(x) = \exp\left[\frac{\pi}{24\varepsilon}(x+1)^2\right] f(x).$$

Dette gir

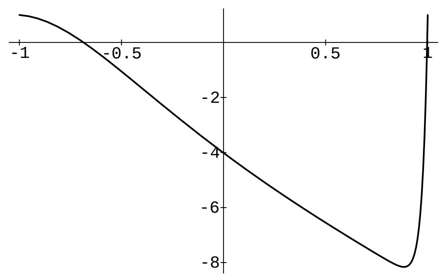
$$\varepsilon f'' + \left[1 - \frac{\pi^2}{32\varepsilon}(x+1)^2 + \cdots\right] f = 0. \tag{27}$$

Overgangen fra oscillerende til exponensiell oppførsel skjer altså ved vendepunktet $(Q(x) = 0)$

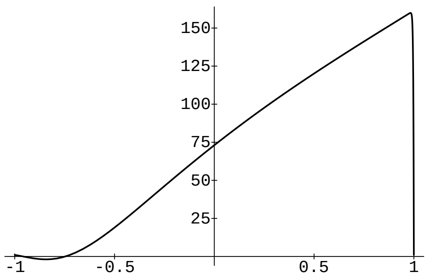
$$x + 1 = \frac{4}{\pi}\sqrt{2\varepsilon}. \tag{28}$$

Løsningen er altså oscillerende opp til dette punktet, og vil generelt vokse eksponensielt med ε^{-1} til høyre for det.

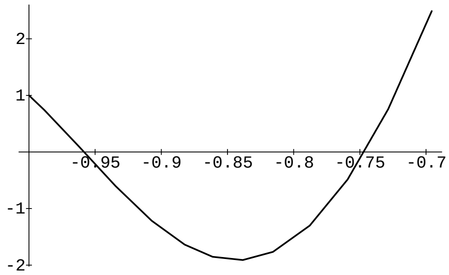
Det er en stor numerisk utfordring å teste disse konklusjonene mot numerisk løsning av problemet, men et begynnende mønster kommer til syne ettersom vi minsker ε. For $\varepsilon = 0.05$ (som svarer til et WKB vendepunkt ved $x = -0.597$) blir løsningen som i figuren under:



Det oscillerende grensesjiktet er ikke spesielt tydelig over, siden det høyst kan sies å inneholde en halv oscillasjon. For $\varepsilon = 0.001$ (som svarer til et WKB vendepunkt ved $x = -0.943$) blir den numeriske løsningen som i figuren under



Selv om ikke oscillasjoner er det mest prominente trekk ved denne figuren heller, ser vi indikasjoner på at det er i ferd med å utvikle seg en struktur nær $x = -1$. Når vi bare fokuserer oppmerksomheten på dette området finner vi omtrent én oscillasjon:



(d) For en mer detaljert analyse av ligning (22), med $a(x) = 1 + x^2$, finner vi i det ytre området, $x \in (-1 + \mathcal{O}(\varepsilon), 1)$ ligningen

$$(1 + x^2)y'_{\text{ytre}}(x) + y_{\text{ytre}}(x) = 0, \quad y_{\text{ytre}}(1) = 1, \tag{29}$$

med ytre løsning

$$y_{\text{ytre}}(x) = \exp\left(\arctan(1) - \arctan(x)\right). \tag{30}$$

Vi ser at for denne løsningen gjelder $y_{\text{ytre}}(-1) = \exp\left(2\arctan(1)\right) = \mathrm{e}^{\pi/2}$. I det indre området, $x \in (-1, \mathcal{O}(\varepsilon))$, innfører vi $X = (x+1)/\varepsilon$, $Y(X) = y(x)$, og finner ligningen

$$Y''(X) + 2Y'(X) = 0, \quad Y(0) = 1,\ Y(\infty) = \mathrm{e}^{\pi/2}, \tag{31}$$

med indre løsning

$$y_{\text{indre}}(x) = Y(X) = \mathrm{e}^{-2X} + \mathrm{e}^{\pi/2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2X}\right). \tag{32}$$

I matching-området, $(1+x) \to 0^+$ og $(1+x)/\varepsilon \to \infty$ når $\varepsilon \to 0^+$, er både den indre og den ytre løsningen lik $y_{\text{match}}(1) = \mathrm{e}^{\pi/2}$. Den uniforme tilnærmingen blir derfor

$$\begin{aligned} &y_{\text{uniform}}(x) = y_{\text{ytre}}(x) + y_{\text{indre}}(x) - y_{\text{match}}(x) = \\ &\left(1 - \mathrm{e}^{\pi/2}\right)\mathrm{e}^{-2(x+1)/\varepsilon} + \mathrm{e}^{\pi/4}\,\mathrm{e}^{-\arctan x}. \end{aligned} \tag{33}$$

Denne løsningen svarer til de heltrukne kurvene plottet over — jfr. punkt (a).

5. I denne oppgaven skulle vi bruke flerskalautvikling til å analysere startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \varepsilon \sin 2t\, y(t), \tag{34}$$

når $\varepsilon \to 0^+$ og $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.

(a) Innfører tidsskalaer t og $\tau = \varepsilon t$, med $y(t) = Y(t,\tau)$. Da få vi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) Y(t,\tau) + Y(t,\tau) = \varepsilon \sin 2t\, Y(t,\tau). \tag{35}$$

(b) Vi utvikler $Y(t,\tau)$ i en rekke i ε, $Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \cdots$. Til nullte orden i ε reduserer ligning (35) seg til

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right) Y_0(t,\tau) = 0, \tag{36}$$

med generell løsning

$$Y_0(t,\tau) = A_+(\tau)\,\mathrm{e}^{it} + A_-(\tau)\,\mathrm{e}^{-it}. \tag{37}$$

(c) Vi ser så på ligning (35) til orden ε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right) Y_1(t,\tau) = \left(\sin 2t - 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\right) Y_0(t,\tau) = \\ &\left(\frac{1}{2i}A_- - 2iA'_+\right)\mathrm{e}^{it} - \left(\frac{1}{2i}A_+ - 2iA'_-\right)\mathrm{e}^{-it} + \text{ikke-sekulære ledd.}\end{aligned} \tag{38}$$

De ikke-sekulære leddene er proporsjonale med $\mathrm{e}^{\pm 3t}$. Vi ønsker at de sekulære leddene skal forsvinne, dvs. at

$$4A'_+ + A_- = 0, \quad 4A'_- + A_+ = 0, \tag{39}$$

eller

$$16A''_+ - A_+ = 0, \quad 16A''_- - A_- = 0. \tag{40}$$

(d) Den generelle løsningen til (39) er

$$A_+(\tau) = a_+\,\mathrm{e}^{\tau/4} + a_-\,\mathrm{e}^{-\tau/4}, \quad A_-(\tau) = -a_+\,\mathrm{e}^{\tau/4} + a_-\,\mathrm{e}^{-\tau/4}.$$

Startbetingelsene gir ligningene

$$\begin{aligned}y(0) &= A_+(0) + A_-(0) = 1, \\ y'(0) &= i\,[A_+(0) - A_-(0)] + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0,\end{aligned}$$

med løsning

$$A_+(0) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \quad A_-(0) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,,$$

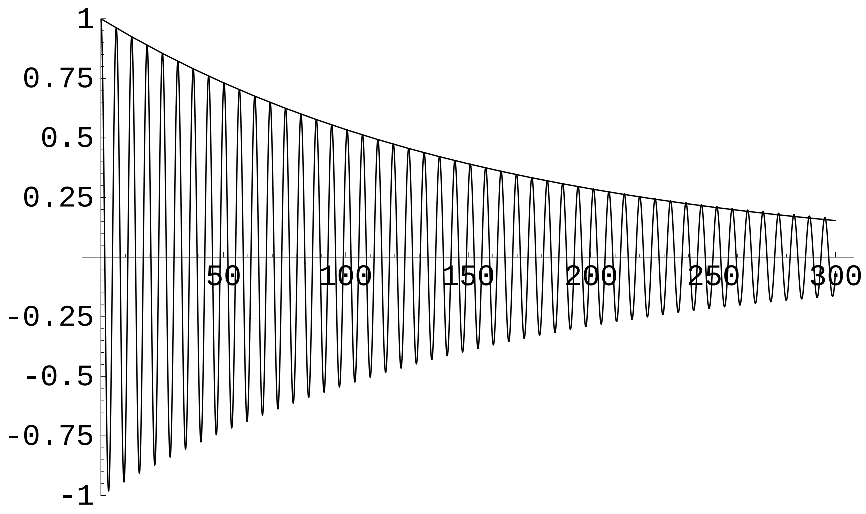
eller

$$a_+ = \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \quad a_- = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{41}$$

Dette gir tilslutt

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\tau/4}\cos t + \mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{42}$$

Figuren under viser en numerisk løsning av problemet, sammenlignet med den langsomt varierende amplituden $\mathrm{e}^{-\tau/4}$ for $\varepsilon = 0.025$. Som man ser er overensstemmelsen god. Men vi bør likevel forvente at løsningen blir kvalitativt forskjelling for svært store t, fordi en a_+ av orden ε etterhvert vil føre til en eksponensielt voksende amplitude. Dette krever at vi løser problemet til orden ε.


1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
50
100
150
200
250
300