NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag DIF 4993 Ikkelineær dynamikk
Onsdag 10. mai 2000
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

a) Forklar kort hva en periodedoblingskaskade er, gjerne med utgangspunkt i den logistiske avbildningen med parameter a,

$$x \mapsto x' = ax(1-x) \ .$$

Kan lignende periodedoblingskaskader forekomme i avbildninger med mange variable? I system med kontinuerlig tid?
Hva innebærer det i denne sammenhengen at to ulike dynamiske system er i samme universalitetsklasse?

b) Forklar kort hva en tangentbifurkasjon er, også gjerne med utgangspunkt i den logistiske avbildningen.
Hva menes med intermittent dynamikk?

Oppgave 2:

Vi tar for oss en enkel modell for tidsutviklingen av en epidemi. La $F(t)$ være antallet friske individer og $S(t)$ antallet syke individer ved tiden t. Reproduksjonsraten pr. individ for de friske individene er $a > 0$, dødsraten pr. individ for de syke individene er $b > 0$, og smitteraten pr. friskt individ er proporsjonal med antallet syke, med en proporsjonalitetskonstant $c > 0$. Det gir følgende ligningssystem, der $\dot{F} = \mathrm{d}F/\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} \dot{F} &= aF - cFS \ , \\ \dot{S} &= -bS + cFS \ . \end{aligned}$$

a) Dette er et to-dimensjonalt autonomt dynamisk system med kontinuerlig tid. Hva betyr det, og hva slags attraktorer kan forekomme i et slikt system?

b) Vis at dette ligningssystemet inneholder bare én relevant parameter. Mer presist: ved å innføre skalerte variable $x = \alpha F$ og $y = \alpha S$, der α er konstant, og dessuten skalere tiden t, kan vi oppnå at ligningene får formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad x - xy \;, \\ \dot{y} &= -By + xy \;. \end{aligned} \tag{1}$$

Finn parameteren B uttrykt ved a, b og c.

c) Vis at disse ligningene impliserer at $K = x + y - B \ln|x| - \ln|y|$ er konstant.

d) Finn fikspunktene for bevegelsesligningen (1), og analyser stabiliteten av dem. Vi forutsetter hele tiden at $B > 0$.

e) Skisser et fullstendig faseportrett (hvordan systemet beveger seg) både for positive og negative verdier av x og y. Kan du si noe om Lyapunov-eksponentene i de forskjellige områdene av faserommet?

f) Kan denne modellen ha noe med lemenår å gjøre?

Oppgave 3:

Den såkalte "sine–Gordon-ligningen" for et felt $u = u(x,t)$ har formen

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \;.$$

Vi skriver $u_t = \partial u/\partial t$, $u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2$, osv..
Denne ligningen har løsninger som er permanente bølger: de beveger seg med en konstant hastighet c uten å forandre form. Disse løsningene har den generelle formen $u(x,t) = \phi(\xi)$, der $\xi = x - ct$, og der $\cos\phi(\xi) \to 1$ og $\phi'(\xi) \to 0$ for $\xi \to \pm\infty$ ($\phi' = \phi_\xi = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\xi$).
De er solitoner, i den forstand at to permanente bølger med ulike hastigheter kan kollidere uten å miste formen.

a) Vis at hvis u er en permanentbølgeløsning, som ovenfor, så er enten $\phi(\xi) = 2m\pi$ eller $\phi(\xi) = 2m\pi + 4 \arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi - \xi_0)}$, der m er heltallig og $\gamma = 1/\sqrt{1 - c^2}$, mens ξ_0 er en vilkårlig integrasjonskonstant.
Du kan *muligens* ha nytte av det ubestemte integralet

$$\pm \int \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)}} = \int \frac{\mathrm{d}\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \ln\left|\tan\frac{\phi}{4}\right| \;.$$

I resten av denne oppgaven tar vi for oss to koplede sine–Gordon-ligninger,

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \sin(u + \epsilon v) + \epsilon \sin(v + \epsilon u) &= 0 \;, \\ v_{tt} - v_{xx} + \sin(v + \epsilon u) + \epsilon \sin(u + \epsilon v) &= 0 \;. \end{aligned} \tag{2}$$

Spesielt tar vi for oss løsninger som er permanente bølger, dvs. at de har formen

$$u(x,t) = \phi(\xi) \ , \qquad v(x,t) = \chi(\xi) \ . \tag{3}$$

b) Anta først at $\epsilon = 0$, slik at ligningssettet (2) består av to uavhengige ligninger.
Hvilke permanentbølgeløsninger (av formen (3)) finnes i dette tilfellet?
Skisser gjerne typiske eksempler på hvordan kurven $(\phi(\xi), \chi(\xi))$ vil se ut, når ξ løper fra $-\infty$ til $+\infty$.

c) Vis at selv om $\epsilon \neq 0$, så eksisterer det likevel spesielle løsninger av ligningssettet (2) som er permanente bølger, og som er solitoner, i den forstand at to slike permanente bølger med ulike hastigheter kan kollidere uten å miste formen.
(Hint: sett f.eks. $u = \pm v$).

d) Vis at for en generell permanentbølgeløsning må

$$\frac{1}{2}\left((\phi'(\xi))^2 + (\chi'(\xi))^2\right) + \frac{\cos(\phi(\xi) + \epsilon\chi(\xi)) + \cos(\chi(\xi) + \epsilon\phi(\xi))}{1 - c^2} = E \ .$$

der E er en integrasjonskonstant. Randkravene når $\xi \to \pm\infty$ er at $\phi(\xi)$ og $\chi(\xi)$ må gå mot konstante verdier, slik at

$$\cos(\phi(\xi) + \epsilon\chi(\xi)) \to 1 \ , \qquad \cos(\chi(\xi) + \epsilon\phi(\xi)) \to 1 \ .$$

Hva blir da verdien av E?

e) Skisser eksempler på hvordan kurvene $(\phi(\xi), \chi(\xi))$ kan se ut for permanentbølgeløsninger av de koplede ligningene.
Kan det tenkes permanentbølgeløsninger av de koplede ligningene (med $\epsilon \neq 0$) som ikke har noen motsvarighet blant permanentbølgeløsningene av de ukoplede ligningene (med $\epsilon = 0$)? Det forlanges ikke her bevis for at slike løsninger faktisk eksisterer.