Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Professor II Tor Wøhni
Telefon: + 47 67 16 25 93
Kontakt i Trondheim: Professor Kåre Olaussen, telefon 73 59 36 52

Eksamen i DIF4995/EVU VUF 4001 IONISERENDE STRÅLINGS VEKSELVIRKNING MED MATERIE

Mandag 21. mai 2001
09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **B2**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*
Se dessuten vedlagte tabell (side 8), og nedenforstående tabell over fysiske konstanter.

Eksamen avholdes samtidig i Trondheim, Oslo, Aalborg og Uppsala.
Oppgavesettet er gitt på norsk/engelsk på side 2–4, og i ren engelsk versjon på side 5–7.

Constant	**Symbol**	**Value**
Atomic mass unit	u	1.6606×10^{-27} kg
Avogadro's constant	N_{A}	6.0220×10^{26} kmol^{-1}
Bohr magneton	μ_{B}	9.2741×10^{-24} J T^{-1}
Bohr radius	a_0	5.2918×10^{-11} m
Boltzmann constant	k	1.3807×10^{-23} J K^{-1}
Electron charge	e	1.6022×10^{-19} C
Fine structure constant	α	7.2974×10^{-3}
Electron radius	r_0	2.8179×10^{-15} m
Electron rest mass	m_{e}	9.1095×10^{-31} kg
Proton rest mass	m_{p}	1.6726×10^{-27} kg
Neutron rest mass	m_{n}	1.6749×10^{-27} kg
Planck constant	h	6.6261×10^{-34} Js
Planck constant (reduced)	$\hbar$	1.0546×10^{-34} Js
Vacuum speed of light	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
Vacuum permeability	μ_0	1.2566×10^{-6} H m^{-1}
Vacuum permittivity	ε_0	8.8542×10^{-12} C^2 J^{-1} m^{-1}

Oppgave 1 (8 p)

a) Hva menes med begrepet *Straggling* innen ladete partiklers vekselvirkning? Nevn ulike former for straggling.

b) Definér *stragglingparameteren* S for tunge ladete partikler. Anta at sporlengdefordelingen er N-fordelt, og vis at $S = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma$, der σ er standardavviket i normalfordelingen.

c) Anta at straggling parameteren for protoner med en middelrekkevidde i luft på 100 cm er 2%. Beregn sannsynligheten for at et proton skal ha en rekkevidde (sporlengde) større eller lik 104 cm. Bruk vedlagte tabell over standard normalfordelingen (normalfordeling med forventningverdi = 0 og standardavvik $\sigma = 1$).

d) Energistraggling for elektroner kan beskrives av Landaus stragglingfunksjon $f(\Delta, s)$. Sett opp transportlikningen for denne funksjonen, og forklar det fysiske innhold i leddene som inngår.

Oppgave 2 (6 p)

Mass stopping power for tunge ladete partikler kan uttrykkes som følger:

$$\frac{1}{\rho} S_{\text{col}} = \text{konstant} \cdot L,$$

der L ofte omtales som *stopping number*.

a) Anta at mass stopping power for 5 MeV protoner i vann er 79 MeV cm^2/g. Anslå mass stopping power for 5 MeV α-partikler i vann. Se bort fra forskjellen i stopping number.

b) Hvilke korreksjoner inngår i stopping number?

c) Vis i et diagram skjematisk hvordan kollisjons-stoppingpower S_{col}/ρ og strålings-stoppingpower S_{rad}/ρ for elektroner varierer som funksjon av energien. Bruk materialene vann og bly, og forklar kurveforløpene.

Oppgave 3 (5 p)

a) How does the total cross section for elastic neutron scattering from ^{12}C vary with energy from thermal energy up to 10 keV?

b) Neutrons are produced by an Am Be source, where α particles from the decay of ^{241}Am induces the nuclear reaction $^{9}\text{Be}(\alpha, \text{n})^{12}\text{C}$. The maximum α energy is 5.5 MeV. What is the maximum neutron energy?

What is the minimum neutron energy? (**Hint:** Think twice, and motivate your result!)

Oppgave 4 (7p)

Med et *hydrogenlignende atom* mener man et atom som er ionisert så mye at det bare har ett elektron igjen.

a) Skriv ned *Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.*

b) Hvordan varierer energien E til grunntilstanden for et hydrogenlignende atom med kjerneladningen?

c) Hvordan varierer utstrekningen a til grunntilstanden for et hydrogenlignende atom med kjerneladningen?

d) Hvis man skifter ut elektronet i et hydrogenlignende atom med et myon får man et såkalt μ-mesisk atom. Hvordan varierer utstrekningen a til grunntilstanden for et slikt atom med massen m_μ?

e) Skriv ned Einsteinrelasjonen mellom energi og frekvens til fotoner.

f) Ved analyse av atomære overganger gjør man ofte *dipoltilnærmingen*, som baserer seg på at bølgelengden λ til det utstrålte fotonet er mye større en utstrekningen a til de atomære tilstandene som er involvert i prosessen.

Hvordan skalerer λ/a med kjerneladningen for en gitt overgang (f.eks $2p \longrightarrow 1s$) i et hydrogenlignende atom?

g) Gjør et numerisk overslag av forholdet λ/a for hydrogenatomet. (Du trenger ikke å ta hensyn til numeriske faktorer som 2 og π, bare hvordan dette forholdet varierer med naturkonstanter som $\hbar$ osv.)

Oppgave 5 (7p)

a) Skriv ned de relativistiske uttrykkene for energien E og impulsen $\vec{\boldsymbol{p}}$ til en fri partikkel med masse m og hastighet $\vec{\boldsymbol{v}}$. Vis at størrelsen $E^2/c^2 - p^2$ er uavhengig av $\vec{\boldsymbol{v}}$, og derfor er en relativistisk invariant størrelse.

b) Vis at en fri partikkel ikke kan absorbere et foton. [**Hint:** Anta det motsatte, og vis at dette er umulig. Velg f.eks det koordinatsystemet hvor partikkelen er i ro før prosessen.]

c) Betrakt fotoelektrisk emisjon av et atomært elektron, med en slutt-energi E_f som er ikke-relativistisk, men likevel mye større enn bindingsenergien. Skriv ned ligningene for energi- og impulsbevarelse.
Vis at impulsen $\vec{\boldsymbol{p}}_f$ til det emitterte elektronet og rekyl-impulsen $\vec{\boldsymbol{q}}$ til rest-atomet begge er mye større enn fotonets impuls $\vec{\boldsymbol{p}}_\gamma$. [Anta under utledningen at rest-atomets rekyl-*energi* er neglisjerbar.]

d) Det ikke-relativistiske tverrsnittet for fotoelektrisk emisjon av et elektron fra et *hydrogenlignende* atom kan i Born-approksimasjonen skrives på formen

$$\sigma_{\gamma,e} = \frac{256}{3}\,\alpha\,\pi\left(\frac{a_B}{Z}\right)^2\left(\frac{E_B}{E_\gamma}\right)^{7/2}.$$

Hva står symbolene α, a_B, Z, E_B og E_γ i dette uttrykket for?

Tverrsnittet $\sigma_{\gamma,e}$ avtar svært raskt med økende foton-energi. Hva er (kort forklart) bakgrunnen for denne oppførselen?

e) Hvordan avhenger E_B og $\sigma_{\gamma,e}$ av Z?

Oppgave 6 (7 p)

Et foton med impuls $\hbar\mathbf{k}_1$ spres på et elektron med bølgefunksjon $\Psi_i(\mathbf{r})$. Fotonet går ut med impuls $\hbar\mathbf{k}_2$, og elektronet får sluttilstanden $\Psi_f(\mathbf{r})$. Matriseelementet for reaksjonen er

$$M_{fi} = \int \Psi_f^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}}\,\Psi_i(\mathbf{r})d^3x,$$

der $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$.

a) Anta at Ψ_i og Ψ_f representerer frie partikler, og vis at impulsen da er bevart i prosessen.

b) Anta at Ψ_i representerer et elektron bundet i et atom. Forklar hva vi mener med koherent og inkoherent spredningstverrsnitt.

c) Formfaktoren $F(Q)$ for et atom med n elektroner er gitt ved:

$$F(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}_j} \Psi_i(\mathbf{x})\, dx,$$

der $\Psi(\mathbf{x})$ står for $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2....., \mathbf{r}_n)$ og $dx = \prod_{j=1}^{n} d^3x_j$.

Vis at det koherente tverrsnittet er proporsjonalt med $|F(Q)|^2$.

d) For hydrogen er elektronbølgefunksjonen $\Psi(\mathbf{r}) = (\pi a_0^3)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-r/a_0}$ der a_0 er Bohr-radien.

Vis at $F(Q)$ for hydrogen er

$$F(Q) = \frac{1}{[1 + (Qa_0/2)^2]^2}.$$

e) Beregn $F(Q)$ for fotoner som har energien $\hbar\omega = 10$ keV og som spres på hydrogen med spredningsvinkel $\theta = 60^\circ$ ($a_0 = 137 \times (\hbar/m_\mathrm{e}c)$, $m_\mathrm{e}c^2 = 0.511$ MeV).

f) Den inkoherente spredningsfunksjonen $S(Q)$ er gitt ved

$$S(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)}\, \Psi_i(\mathbf{x}) dx - |F(Q)|^2$$

(se også punkt **c)**. Beregn $S(Q)$ for hydrogen.

Problem 1 (8 p)

a) Explain the term *Straggling* used in the interactions of charged particles. List various forms of straggling.

b) Define the *straggling parameter* S for heavy charged particles. Assume that the path lengths are normally distributed, and show that $S = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma$, where σ is the standard deviation of the distribution.

c) Assume that protons with a mean range of 100 cm in air have a straggling parameter of 2%. Calculate the probability that a proton should have a path length equal to or greater than 104 cm. Use the attached table over the standardized normal distribution function (i.e. normal distribution with expectation = 0 and standard deviation $\sigma = 1$.)

d) The energy straggling for electrons may be described by Landaus straggling function $f(\Delta, s)$. Write the transport equation for this function, and explain the physical meaning of the various terms.

Problem 2 (6 p)

Mass stopping power for heavy charged particles can be expressed as follows:

$$\frac{1}{\rho} S_{\mathrm{col}} = \text{constant} \cdot L,$$

where L is often referred to as the stopping number.

a) Assume that the stopping power for 5 MeV protons in water is 79 MeV cm^2/g. Estimate the mass stopping power for 5 MeV α-particles in water. Differences in stopping number may be neglected.

b) Which corrections are included in the stopping number?

c) Draw a schematic diagram showing the collision stopping power S_{col}/ρ and the radiative stopping power S_{rad}/ρ for electrons as a function of energy. Do this for water and lead, and explain the graphs.

Problem 3 (5 p)

a) How does the total cross section for elastic neutron scattering from ^{12}C vary with energy from thermal energy up to 10 keV?

b) Neutrons are produced by an Am Be source, where α particles from the decay of ^{241}Am induces the nuclear reaction $^{9}\mathrm{Be}(\alpha, \mathrm{n})^{12}\mathrm{C}$. The maximum α energy is 5.5 MeV. What is the maximum neutron energy?

What is the minimum neutron energy? (**Hint:** Think twice, and motivate your result!)

Problem 4 (7p)

With a *hydrogenlike atom* we mean an atom which is ionized until it is left with only one electron.

a) Write down the *Heisenberg uncertainty relation*

b) How does the ground state energy E of a hydrogenlike atom vary with the charge of the nucleus?

c) How does the extent a of the ground state of a hydrogenlike atom vary with the charge of the nucleus?

d) If one substitutes the electron in a hydrogenlike atom with a muon one obtains a μ-mesic atom. How does the extent a of the ground state in such an atom vary with the mass m_μ?

e) Write down the Einstein relation between energy and frequency of photons.

f) When analyzing atomic transitions one often makes use of the *dipole approximation*, which is based on the assumption that the wavelength λ of the emitted photon is much larger than the extent a of the atomic states involved in the process.

How does λ/a scale with the charge of the nucleus for a given transition (e.g. $2p \longrightarrow 1s$ in a hydrogenlike atom?

g) Make a numerical estimate of the ratio λ/a for the hydrogen atom. (You don't have to take into account numerical factors like 2 and π, only how this ratio varies with natural constants like $\hbar$ etc.)

Problem 5 (7 p)

a) Write down the relativistic expressions for the energy E and momentum $\vec{\boldsymbol{p}}$ of a free particle with mass m and velocity $\vec{\boldsymbol{v}}$. Show that the quantity $E^2/c^2 - p^2$ is independent of $\vec{\boldsymbol{v}}$ and therefore is a relativistically invariant quantity.

b) Show that a free particle can not absorb a photon. [**Hint:** Assume the opposite, and show that this is not possible. Use for example the coordinate system where the particle is at rest before the process.]

c) Consider the photoelectric emission of an atomic electron, with a final energy E_f that is non-relativistic, but still much higher than the binding energy. Write down the equations of energy and momentum conservation.
Show that the momentum $\vec{\boldsymbol{p}}_f$ of the emitted electron and the recoil momentum $\vec{\boldsymbol{q}}$ of the rest atom are both much larger than the photon momentum $\vec{\boldsymbol{p}}_\gamma$. [Assume in the derivation that the recoil *energy* (of the rest atom) is negligible.]

d) The non-relativistic cross section for the photoelectric emission of an electron from a *hydrogenlike* atom can in the Born approximation be written as

$$\sigma_{\gamma,e} = \frac{256}{3}\,\alpha\,\pi\left(\frac{a_B}{Z}\right)^2\left(\frac{E_B}{E_\gamma}\right)^{7/2}.$$

Which quantities do the symbols α, a_B, Z, E_B and E_γ represent?

e) This cross section decreases very rapidly for increasing photon energy. Explain (briefly) the reason behind this behaviour.

f) How do E_B and $\sigma_{\gamma,e}$ depend on Z?

Problem 6 (7 p)

A photon with momentum $\hbar\mathbf{k}_1$ is scattered on an electron with wave function $\Psi_i(\mathbf{r})$. The photon is leaving with momentum $\hbar\mathbf{k}_2$, and the electron ends in the final state $\Psi_f(\mathbf{r})$.
The matrix element for the reaction is

$$M_{fi} = \int \Psi_f^*(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}}\, \Psi_i(\mathbf{r}) d^3x,$$

where $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$.

a) Assume that Ψ_i and Ψ_f represent free particles, and show that the momentum is conserved in the process.

b) Assume that Ψ_i represents an electron bound in an atom. Explain what we mean by coherent and incoherent cross sections.

c) The form factor $F(Q)$ for an atom with n electrons is given by:

$$F(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{n} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}_j}\, \Psi_i(\mathbf{x})\, dx,$$

where $\Psi(\mathbf{x})$ represents $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \ldots\ldots, \mathbf{r}_n)$ and $dx = \prod_{j=1}^{n} d^3x_j$.

Show that the coherent cross section is proportional to $|F(Q)|^2$.

d) The electron wave function for hydrogen is $\Psi(\mathbf{r}) = (\pi a_0^3)^{-1/2}\, e^{-r/a_0}$ where a_0 is the Bohr-radius.

Show that $F(Q)$ for hydrogen is

$$F(Q) = \frac{1}{[1 + (Qa_0/2)^2]^2}.$$

e) Calculate $F(Q)$ for photons with energy $\hbar\omega = 10$ keV, scattering on hydrogen with scattering angle $\theta = 60°$ ($a_0 = 137 \times (\hbar/m_e c)$, $m_e c^2 = 0.511$ MeV).

f) The incoherent scattering function $S(Q)$ is given by

$$S(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j,k=1}^{n} e^{i\mathbf{Q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)}\, \Psi_i(\mathbf{x}) dx - |F(Q)|^2$$

(see also paragraph **c)**). Calculate $S(Q)$ for hydrogen.

Tabell over standard normalfordeling $\Phi(z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9147
1.3	.9320	.9490	.9658	.9824	.9988	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	$.9^{2}969$	$.9^{2}358$	$.9^{2}613$	$.9^{2}863$	$.9^{2}111$	$.9^{2}134$	$.9^{2}158$
2.4	$.9^{2}180$	$.9^{2}202$	$.9^{2}224$	$.9^{2}245$	$.9^{2}266$	$.9^{2}286$	$.9^{2}305$	$.9^{2}324$	$.9^{2}343$	$.9^{2}361$
2.5	$.9^{2}379$	$.9^{2}396$	$.9^{2}413$	$.9^{2}430$	$.9^{2}446$	$.9^{2}461$	$.9^{2}477$	$.9^{2}492$	$.9^{2}506$	$.9^{2}520$
2.6	$.9^{2}534$	$.9^{2}547$	$.9^{2}560$	$.9^{2}573$	$.9^{2}585$	$.9^{2}598$	$.9^{2}609$	$.9^{2}621$	$.9^{2}632$	$.9^{2}643$
2.7	$.9^{2}653$	$.9^{2}664$	$.9^{2}674$	$.9^{2}683$	$.9^{2}693$	$.9^{2}702$	$.9^{2}711$	$.9^{2}720$	$.9^{2}728$	$.9^{2}736$
2.8	$.9^{2}744$	$.9^{2}752$	$.9^{2}760$	$.9^{2}767$	$.9^{2}774$	$.9^{2}781$	$.9^{2}788$	$.9^{2}795$	$.9^{2}801$	$.9^{2}807$
2.9	$.9^{2}813$	$.9^{2}819$	$.9^{2}825$	$.9^{2}831$	$.9^{2}836$	$.9^{2}841$	$.9^{2}846$	$.9^{2}851$	$.9^{2}856$	$.9^{2}861$
3.0	$.9^{2}865$	$.9^{2}869$	$.9^{2}874$	$.9^{2}878$	$.9^{2}882$	$.9^{2}886$	$.9^{2}889$	$.9^{2}893$	$.9^{2}896$	$.9^{2}900$
3.1	$.9^{3}324$	$.9^{3}646$	$.9^{3}957$	$.9^{3}126$	$.9^{3}155$	$.9^{3}184$	$.9^{3}211$	$.9^{3}238$	$.9^{3}264$	$.9^{3}289$
3.2	$.9^{3}313$	$.9^{3}336$	$.9^{3}359$	$.9^{3}381$	$.9^{3}402$	$.9^{3}423$	$.9^{3}443$	$.9^{3}462$	$.9^{3}481$	$.9^{3}499$
3.3	$.9^{3}517$	$.9^{3}534$	$.9^{3}550$	$.9^{3}566$	$.9^{3}581$	$.9^{3}596$	$.9^{3}610$	$.9^{3}624$	$.9^{3}638$	$.9^{3}651$
3.4	$.9^{3}663$	$.9^{3}675$	$.9^{3}687$	$.9^{3}698$	$.9^{3}709$	$.9^{3}720$	$.9^{3}730$	$.9^{3}740$	$.9^{3}749$	$.9^{3}758$
3.5	$.9^{3}767$	$.9^{3}776$	$.9^{3}784$	$.9^{3}792$	$.9^{3}800$	$.9^{3}807$	$.9^{3}815$	$.9^{3}822$	$.9^{3}828$	$.9^{3}835$
3.6	$.9^{3}841$	$.9^{3}847$	$.9^{3}853$	$.9^{3}858$	$.9^{3}864$	$.9^{3}869$	$.9^{3}874$	$.9^{3}879$	$.9^{3}883$	$.9^{3}888$
3.7	$.9^{3}892$	$.9^{3}896$	$.9^{4}390$	$.9^{4}426$	$.9^{4}799$	$.9^{4}116$	$.9^{4}150$	$.9^{4}184$	$.9^{4}216$	$.9^{4}247$
3.8	$.9^{4}277$	$.9^{4}305$	$.9^{4}333$	$.9^{4}359$	$.9^{4}385$	$.9^{4}409$	$.9^{4}433$	$.9^{4}456$	$.9^{4}478$	$.9^{4}499$
3.9	$.9^{4}519$	$.9^{4}538$	$.9^{4}557$	$.9^{4}575$	$.9^{4}593$	$.9^{4}609$	$.9^{4}625$	$.9^{4}641$	$.9^{4}655$	$.9^{4}670$

Notasjon: I tabellen over betyr 9^n at tallet 9 skal gjentas n ganger.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} dx\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$$