Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i

DIF4995/EVU VUF 4001 IONISERENDE STRÅLINGS VEKSELVIRKNING MED MATERIE

Mandag 21. mai 2001

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 4

(7p)

Med et *hydrogenlignende atom* mener man et atom som er ionisert så mye at det bare har ett elektron igjen.

a) Skriv ned *Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.*

Dersom p og q er et par av kanonisk konjugerte variable (f.eks. x-komponentene av bevegelsesmengde og posisjon) så gjelder

$$\Delta p\,\Delta q \geq \frac{1}{2}\hbar, \tag{1}$$

der $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$ og $\Delta q = \sqrt{\langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2}$.

Kommentar: Vi kan bruke usikkerhetsrelasjonen til å estimere at den kinetiske energien til et hydrogenlignende atom i grunntilstanden er omtrent

$$K \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

når den potensielle energien er omtrent

$$V \approx -\frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Videre, ved minimering av totalenergien $E = K + V$ med hensyn på r finner vi at grunntilstandsenergien er av størrelsesorden

$$E \approx -\frac{e^4 Z^2 m}{2\,(4\pi\varepsilon_0\hbar)} = -\frac{1}{2}Z^2\alpha^2 mc^2,$$

og utstrekningen av grunntilstanden er av størrelsesorden

$$a \approx \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2 Z} = \left(\frac{\hbar}{mc}\right)\frac{1}{Z\alpha},$$

Dette gir en måte å svare på de resterende delspørsmålene.

b) Hvordan varierer energien E til grunntilstanden for et hydrogenlignende atom med kjerneladningen?

$$E \sim Z^2 \tag{2}$$

c) Hvordan varierer utstrekningen a til grunntilstanden for et hydrogenlignende atom med kjerneladningen?

$$a \sim Z^{-1} \tag{3}$$

d) Hvis man skifter ut elektronet i et hydrogenlignende atom med et myon får man et såkalt μ-mesisk atom. Hvordan varierer utstrekningen a til grunntilstanden for et slikt atom med massen m_μ?

$$a \sim \frac{1}{m_\mu} \tag{4}$$

Merk at svaret på dette spørsmålet essensielt sto oppgitt i teksten til oppgave **6e)**.

e) Skriv ned Einsteinrelasjonen mellom energi og frekvens til fotoner.

$$E_\gamma = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \tag{5}$$

f) Ved analyse av atomære overganger gjør man ofte *dipoltilnærmingen*, som baserer seg på at bølgelengden λ til det utstrålte fotonet er mye større en utstrekningen a til de atomære tilstandene som er involvert i prosessen.

Hvordan skalerer λ/a med kjerneladningen for en gitt overgang (f.eks $2p \longrightarrow 1s$) i et hydrogenlignende atom?

Fotonets energi, $E_\gamma = -\frac{3}{4}E$, skalerer som Z^2, så fotonets bølgelengde skalerer som Z^{-2}. Og siden utstekningen a skalerer som Z^{-1} finner vi at

$$\frac{\lambda}{a} \sim Z^{-1} \tag{6}$$

Dipolapproksimasjonen blir altså dårligere for tyngre kjerner.

g) Gjør et numerisk overslag av forholdet λ/a for hydrogenatomet. (Du trenger ikke å ta hensyn til numeriske faktorer som 2 og π, bare hvordan dette forholdet varierer med naturkonstanter som $\hbar$ osv.)

Fra Einstein-relasjonen

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 2\pi\frac{\hbar c}{E_\gamma} = 2\pi \times 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{\hbar}{mc}\frac{1}{Z^2\alpha^2}$$

og det tidligere estimatet for a finner vi at

$$\frac{\lambda}{a} = 2\pi \times 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{Z\alpha} \sim \frac{1}{Z\alpha} \tag{7}$$

Her var det ikke meningen at kandidaten skulle finne fram til (den ikke ubetydelige) faktoren $\frac{16\pi}{3}$, bare at forholdet går som $\frac{1}{Z\alpha}$.

Oppgave 5

(7p)

a) Skriv ned de relativistiske uttrykkene for energien E og impulsen $\mathbf{p}$ til en fri partikkel med masse m og hastighet $\mathbf{v}$. Vis at størrelsen $E^2/c^2 - p^2$ er uavhengig av $\mathbf{v}$, og derfor er en relativistisk invariant størrelse.

Den frie partikkelens energi og impuls er

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ og } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{8}$$

der c er lyshastigheten. Vi finner herav at

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \ldots = m^2 c^2, \tag{9}$$

dvs. er uavhengig av $\mathbf{v}$, og derfor en relativistisk invariant.

b) Vis at en fri partikkel ikke kan absorbere et foton. [**Hint:** Anta det motsatte, og vis at dette er umulig. Velg f.eks det koordinatsystemet hvor partikkelen er i ro før prosessen.]

La oss kalle energi og impuls for fotonet for $E_\gamma, \mathbf{p}_\gamma$, og energi og impuls til partikkelen før og etter prosessen for henholdsvis $E, \mathbf{p}$ og $E', \mathbf{p}'$. Dersom prosessen skal være mulig, krever energi- og impulsbevarelsen at

$$E' = E_\gamma + mc^2 \quad \text{og} \quad p' = p_\gamma,$$

når prosessen betraktes fra hvilesystemet for partikkelen (før prosessen). Dette gir

$$\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = (E_\gamma/c - mc)^2 - p_\gamma^2 = m^2c^2 + 2p_\gamma mc,$$

som er større enn m^2c^2. Følgelig er prosessen kinematisk umulig.

c) Betrakt fotoelektrisk emisjon av et atomært elektron, med en slutt-energi E_f som er ikke-relativistisk, men likevel mye større enn bindingsenergien. Skriv ned ligningene for energi- og impulsbevarelse. Vis at impulsen $\mathbf{p}_f$ til det emitterte elektronet og rekyl-impulsen $\mathbf{q}$ til rest-atomet begge er mye større enn fotonets impuls $\mathbf{p}_\gamma$. [Anta under utledningen at rest-atomets rekyl-*energi* er neglisjerbar.]

Når rest-atomets rekyl-energi neglisjeres, er ligningene for energi- og impulsbevarelse:

$$E_\gamma = E_B + E_f \quad \text{og} \quad \mathbf{p}_\gamma = \mathbf{q} + \mathbf{p}_f,$$

der E_B er bindingsenergien. Siden $E_f \gg E_B$, er også $E_\gamma \gg E_B$, og vi har at $E_f \approx E_\gamma$. Derfor har vi

$$p_f = p_f \frac{p_f}{2m_e} \frac{2m_e}{p_f} = E_f \frac{2}{v_f} \approx E_\gamma \frac{2}{v_f},$$

mens $p_\gamma = E_\gamma/c$. Følgelig er

$$\frac{p_f}{p_\gamma} \approx \frac{2c}{v_f} \gg 1, \quad \text{q.e.d.}$$

Vi har da videre at

$$\frac{q}{p_\gamma} = \frac{|\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_f|}{p_\gamma} \approx \frac{p_f}{p_\gamma} \gg 1, \quad \text{q.e.d.}$$

d) Det ikke-relativistiske tverrsnittet for fotoelektrisk emisjon av et elektron fra et *hydrogenlignende* atom kan i Born-approksimasjonen skrives på formen

$$\sigma_{\gamma,e} = \frac{256}{3}\,\alpha\,\pi\left(\frac{a_B}{Z}\right)^2\left(\frac{E_B}{E_\gamma}\right)^{7/2}.$$

Hva står symbolene α, a_B, Z, E_B og E_γ i dette uttrykket for?

Tverrsnittet $\sigma_{\gamma,e}$ avtar svært raskt med økende foton-energi. Hva er (kort forklart) bakgrunnen for denne oppførselen?

Symbolet α står for finstrukturkonstanten, $\approx 1/137$ ($= e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ for den som husker uttrykket). a_B står for Bohr-radien, $\approx 0.5 \times 10^{-10}$ m ($= 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ for den som husker uttrykket). Z er atomnummeret. (Og a_B/Z er "radien" til grunntilstanden i det hydrogenlignende atomet, for den som husker det.) E_B er bindingsenergien, og E_γ er foton-energien.

Hovedårsaken til energi-avhengigheten er at matrise-elementet for fotoeffekt i Born-approksimasjonen er proporsjonalt med impulsbølgefunksjonen $\widetilde{\psi}_i(\mathbf{q})$ i begynnelsestilstanden. Denne avtar raskt med økende q. Siden $E_\gamma \approx E_f = p_f^2/2m_e \approx q^2/2m_e$, betyr dette at tverrsnittet vil avta raskt med økende E_γ. [For den som husker det, avtar $\widetilde{\psi}_i(\mathbf{q})$ som q^{-4} for store q. I tverrsnittet bidrar derfor $|\widetilde{\psi}_i(\mathbf{q})|^2$ med en faktor $q^{-8} \propto E_\gamma^{-4}$. Dette forklarer mesteparten av faktoren $E_\gamma^{-7/2}$ i tverrsnittet.

e) Hvordan avhenger E_B og $\sigma_{\gamma,e}$ av Z?

Det vesentlige her er at bindingsenergien E_B (ikke-relativistisk) er proporsjonal med Z^2, slik at tverrsnittet blir proporsjonalt med femte potens av atomnummeret Z.

Oppgave 6
(7 p)

Et foton med impuls $\hbar\mathbf{k}_1$ spres på et elektron med bølgefunksjon $\Psi_i(\mathbf{r})$. Fotonet går ut med impuls $\hbar\mathbf{k}_2$, og elektronet får sluttilstanden $\Psi_f(\mathbf{r})$. Matriseelementet for reaksjonen er

$$M_{fi} = \int \Psi_f^*(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}}\, \Psi_i(\mathbf{r}) d^3x,$$

der $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$.

a) Anta at Ψ_i og Ψ_f representerer frie partikler, og vis at impulsen da er bevart i prosessen.

For en fri partikkel er Ψ av formen $\Psi \sim e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$ og

$$M_{fi} \sim \int e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f + \hbar\mathbf{k}_1 - \hbar\mathbf{k}_2)/\hbar}\, d^3x \sim \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f + \hbar\mathbf{k}_1 - \hbar\mathbf{k}_2)$$

så $d\sigma \sim |M_{fi}|^2$ har impulsbevarelse.

b) Anta at Ψ_i representerer et elektron bundet i et atom. Forklar hva vi mener med koherent og inkoherent spredningstverrsnitt.

Koherent spredning har vi når $\Psi_i = \Psi_f$, atomet endrer ikke tilstand. For $\Psi_i \neq \Psi_f$ er spredningen inkoherent.

c) Formfaktoren $F(Q)$ for et atom med n elektroner er gitt ved:

$$F(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}_j} \, \Psi_i(\mathbf{x}) \, dx,$$

der $\Psi(\mathbf{x})$ står for $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 ....., \mathbf{r}_n)$ og $dx = \prod_{j=1}^{n} d^3x_j$.

Vis at det koherente tverrsnittet er proporsjonalt med $|F(Q)|^2$.

Bidrag til spredningen fra elektron nr. j er for koherente prosesser,

$$M_{fi} = \int \Psi_i^*(x) \, \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_j} \, \Psi_i(x) \, dx.$$

Bidrag fra alle elektroner summeres koherent til

$$M_{fi} = \int \Psi_i^*(x) \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_j} \, \Psi_i(x) = F(Q).$$

Tverrsnittet er $d\sigma \sim |M_{fi}|^2 \sim |F(Q)|^2$.

d) For hydrogen er elektronbølgefunksjonen $\Psi(\mathbf{r}) = (\pi a_0^3)^{-1/2} \, \mathrm{e}^{-r/a_0}$ der a_0 er Bohr-radien.

Vis at $F(Q)$ for hydrogen er

$$F(Q) = \frac{1}{[1 + (Qa_0/2)^2]^2}.$$

$$\begin{aligned}
F_H(Q) &= \int \Psi_i^*(\mathbf{r}) \, \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \, \Psi_i(\mathbf{r}) \, d^3x \\
&= \frac{1}{\pi a^3} \int \mathrm{e}^{-2r/a + i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \, d^3x \\
&= \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2r/a} \, r^2 dr \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{iQr\cos\theta} \, d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{2}{a^3} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2r/a} \, \frac{\mathrm{e}^{iQr} - \mathrm{e}^{-iQr}}{iQr} \, r^2 dr \\
&= \frac{-2}{a^3\,Q} \frac{\partial}{\partial Q} \int_0^\infty dr \, \mathrm{e}^{-(\frac{2}{a} - iQ)r} + k.k. \quad \text{(kompleks konjugert)} \\
&= \frac{-2}{a^3\,Q} \frac{\partial}{\partial Q} \frac{a}{(2 - iQa)} + k.k. = \frac{-2}{a^3\,Q} \frac{ia^2}{(2 - iQa)^2} + k.k. \\
&= \frac{-2}{a^3\,Q} \frac{ia^2\,(2 + iQa)^2}{(2^2 + Q^2a^2)^2} + k.k. = \frac{-2}{a^3\,Q} \frac{-8Qa^3}{(4 + Q^2a^2)^2} \\
&= \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{Qa}{2}\right)^2\right]^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

e) Beregn $F(Q)$ for fotoner som har energien $\hbar\omega = 10$ keV og som spres på hydrogen med spredningsvinkel $\theta = 60^\circ$ ($a_0 = 137 \times (\hbar/m_e c)$, $m_e c^2 = 0.511$ MeV).

$$Q^2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos\theta = 4k^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

når $k_1 = k_2 = k$.

$$\frac{Qa}{2} = \frac{137\hbar}{m_e c} \frac{2k \sin\frac{\theta}{2}}{2} = 137 \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \sin\frac{\theta}{2}$$

når $k = \frac{\omega}{c}$. Med $\hbar\omega = 10$ keV og $\theta = 60°$ er

$$\frac{Qa}{2} = 137 \frac{10^4}{0.511 \cdot 10^6} \sin(30°) = 1.340 \quad \text{og} \quad F(Q) = 0.128. \tag{11}$$

f) Den inkoherente spredningsfunksjonen $S(Q)$ er gitt ved

$$S(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\mathbf{Q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)} \Psi_i(\mathbf{x}) dx - |F(Q)|^2$$

(se også punkt **c**). Beregn $S(Q)$ for hydrogen.

For hydrogen er $n = 1$ og

$$S(Q) = \int \Psi_i^*(\mathbf{r}) \, \Psi_i(\mathbf{r}) \, d^3x - |F(Q)|^2 ,$$

og siden Ψ er normert er

$$S(Q) = 1 - |F(Q)|^2 . \tag{12}$$