TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk
Eksamen 11. des. 2007. Løsningsforslag

Dette løsningsforslaget er spesielt fyldig med angitt alternative løsninger, slike som er brukt av flere studenter i eksamensbesvarelsen. Det er også nevnt flere av de typiske feilene som er begått. Dette er gitt med liten skrifttype som her.

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	B	E	A	C	C	D	B	A	C	A	B

Detaljer om spørsmålene:

a. B. N1 på de to kulene som ett system: $\sum F = 0 \Rightarrow 2F_\mathrm{f} = 3mg \Rightarrow F_f = \frac{3}{2}mg$.
Øvre kule som system: $\sum F = 0 \Rightarrow mg + S = F_\mathrm{f} \Rightarrow S = F_\mathrm{f} - mg = \frac{3}{2}mg - mg = \frac{1}{2}mg$.
Alternativt kan $\sum F = 0$ for nedre kule brukes.
Et flertall er her blitt lurt ved å svare A ($S = 0$), som hadde vært svaret dersom det ikke er luftmotstand.

b. E. Det er ikke opplyst om klossen beveger seg. Da 50 N $< F_{\mathrm{f,max}} = \mu_\mathrm{s} \cdot 100$ N kan klossen være i ro, da er $F_\mathrm{f} = 50$ N. Eller den kan bevege seg, da er $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} \cdot 100$ N $= 40$ N.

c. A. Når $a = 0$ er $F = ma = 0$. Krafta er gitt ved (minus) den deriverte av E_p, slik at den deriverte må være null.

d. C. Punktet A sin translasjonhastighet er v mot venstre. A's hastighet pga. rotasjonen er $v_\mathrm{t} = \omega r = v$ i retning rett oppover. Vektorsummen blir $v\sqrt{2}$ i retning 45° framover (mot venstre). Her har også et overraskende flertall tatt feil og svart E ($\vec{v}$ rett opp), slik ville det være hvis hjulet roterte uten å ha translasjon, men det står helt klart at det ruller.

e. C. Spinn $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ der $\vec{r}$ i dette tilfellet er partikkelens posisjonsvektor. For en rettlinja bevegelse med konstant v blir L konstant og lik $L = mbv$, der b er normalen fra origo ned på partikkelbanen. Bare dersom partikkelbanen går gjennom origo er $b = 0$ og spinnet lik null.

f. D. Rulling krever friksjon (dvs. A feil) og består av translasjon pluss rotasjon (B feil) under påvirking av tyngdekraft og friksjonskraft (E feil). Endring i pot.energi er lik økning i kin.energi som er lik $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, derfor også C feil, og bare D står igjen. Det er rimelig at a er prop med tyngdens komponent langs planet, $mg\sin\theta$. Ved å sette opp bevegelseslikningene vil man finne $a = \frac{mg\sin\theta}{m+I/R^2}$.

g. B. Tilfellet blir som å slippe en masse rett ned (med relativ fart null) når man beveger seg rettlinjet framover. Bevegelsesmengden og energien deler seg mellom de to legemer, ingen hastigheter endres. Et flertall har svart C (øke), som kun kan skje hvis massene kastes bakover i rotasjonsretningen.

h. A. I stabil stasjonær bane er gravitasjonskraft lik sentripetalkraft: $-GmM_\mathrm{j}/r^2 = -mv^2/r$, som gir $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}GmM_\mathrm{j}/r$. Potensiell energi er $E_\mathrm{p} = -GmM_\mathrm{j}/r$, slik at $E_\mathrm{tot} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = -\frac{1}{2}GmM_\mathrm{j}/r < 0$ og konstant når r er konstant. (Dette regnet som det vanskeligste flervalgsspørsmålet.)

i. C. Likevektskrav (Newton 1): $S_3 = S_2 \cdot \sin 60°$, $S_1 = S_2 \cos 60°$. Da $\sin 60° > \cos 60°$ er $S_3 > S_1$. Videre må S_2 være størst, f.eks. fra Pythagoras: $S_2^2 = S_1^2 + S_3^2$.

j. A. Total energi = maks. potensiell energi = $E_\mathrm{pot,max} = \frac{1}{2}kx_\mathrm{max}^2$. Når $x = x_\mathrm{max}/2$ blir $E_\mathrm{pot} = \frac{1}{2}k(x_\mathrm{max}/2)^2 = E_\mathrm{pot,max}/4$.

k. B. $\omega_a = \sqrt{k/m} = \sqrt{40}\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_b = \sqrt{k/m} = \sqrt{160}\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_c = \sqrt{g/l} \approx= \sqrt{5}\mathrm{s}^{-1}$. T omv. prop. med ω gir at T er minst (kortest) for (b), størst (lengst) for (c). Dette er oppgaven der flest har svart riktig (132 av 169), noen hadde under eksamen spørsmål om tyngdependelen var en matematisk pendel (punktmasse), som man selvsagt må anta når ikke annet er gitt.

Oppgave 2. Translasjon og rulling

a. Energibevarelse, fjæras potensielle energi overføres til kinetisk energi for kula:

$$\frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mv_1^2}{b^2} = \frac{0,500\,\mathrm{kg}\cdot(1,40\,\mathrm{m/s})^2}{(0,0400\,\mathrm{m})^2} = 612,5\,\mathrm{N/m} = \underline{613\,\mathrm{N/m}}.$$

Her kan man ikke bruke noen form for konstant-akselerasjons-likninger, da akselerasjonen øker fra maks ved fullt fjærutslag til null når kula slipper fjæra.

b. Rulling: $\underline{v_B = \omega_B R}$. Begrunnelse kreves ikke her (ment som en hjelp til utregning av $E_{k,B}$.

$$E_{k,B} = E_{k,trans} + E_{k,rot} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$$

$$E_{k,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\frac{v_B^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{5}\right)mv_B^2 \quad = \underline{\frac{7}{10}mv_B^2}$$

og med tallverdi:

$$E_{k,B} = \frac{7}{10}\cdot 0,500\,\text{kg}\cdot(1,00\,\text{m/s})^2 = \underline{0,350\,\text{J}}\,.$$

c. Friksjonskrafta er konstant så lenge kula glir, og lik $F_f = -\mu mg$, med positiv i rulleretningen. Dette er eneste kraft i horisontal retning (en figur vil gjøre seg her), og Newtons 2.lov gir da at translasjonsakselerasjonen er konstant og lik

$$\underline{a = \frac{F_f}{m} = -\mu g.} \tag{1}$$

Den "tidløse" konstant-akselerasjonsllikningen gir da enkel bestemmelse av μ idet v_B og v_A er kjent:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2as = -2\mu gs \quad\Rightarrow\quad \mu = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2gs} = \frac{(1,40\,\text{m/s})^2 - (1,00\,\text{m/s})^2}{2\cdot 9,81\cdot 0,326\,\text{m}^2/\text{s}^2} = \underline{0,150}\,.$$

Alternativt kan man komme fram til denne likningen ved å sette tap i kinetisk translasjonsenergi lik translasjonsarbeid:

$$\Delta E_{k,trans} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_f = F_f\cdot s = -\mu mg\cdot s \quad\Rightarrow\quad v_B^2 - v_A^2 = -2\mu g\cdot s\,,$$

som gir samme uttrykk som ovenfor. Men man kan *ikke* bruke friksjonsarbeid = endring i total kinetisk energi, dvs. følgende er feil:

$$\Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = \frac{7}{10}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_f = F_f\cdot s = -\mu mg\cdot s\,.$$

Her måtte man ha brukt s_{slur} som er den strekningen kuleoverflata har sluret, se ALTERNATIV løsning under d. nedenfor.

Kan evt. finne tallverdi $a = -\mu g = -0,15\cdot 9,81\,\text{m/s}^2 = -1,47\,\text{m/s}^2$. Mange hadde funnet tallverdi for a først ved å bruke likningen $v_B^2 - v_A^2 = 2as$, for deretter å finne μ fra likn. (1), og det er selvsagt greit.

d. Vi finner vinkelakselerasjonen og bruker så konstant-akselerasjonslikning for rotasjonen:
Vinkelakselerasjonen er gitt av Newton 2 for rotasjon, med positiv rotasjonsretning med klokka:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F_f R}{2/5mR^2} = \frac{\mu mgR}{2/5mR^2} = \frac{5\mu g}{\underline{2R}} \quad = 73,58\,\text{s}^{-2} = \underline{73,6\,\text{s}^{-2}}\,.$$

Konstant-akselerasjonslikningen ("den tidløse") for rotasjon av kula mellom A og B lyder

$$\omega_B^2 - \omega_A^2 = 2\alpha\theta_{rot}$$

og som med $\omega_A = 0$ og $\omega_B = v_B/R$ gir

$$\theta_{rot} = \frac{\omega_B^2}{2\alpha} = \frac{(v_B/R)^2}{2}\cdot\frac{2R}{5\mu g} = \frac{v_B^2}{5\mu gR} = \frac{(1,0\,\text{m/s})^2}{5\cdot 0,150\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,05\,\text{m}} = \underline{2,72} \quad (= 156°)\,.$$

Det er mange varianter å løse oppgaven på, spesielt ser det ut til å være fristende å finne tida t og så bruke $\theta_{rot} = \omega_A t + \frac{1}{2}\alpha t^2$. Vinkelhastighet ved A er $\omega_A = 0$ (mange har feilaktig satt $\omega_A = v_A/R$) og tida t kan finnes på ulike måter, den enkleste er å bruke midlere translasjonsfart:

$$s = \bar{v} = \frac{v_A + v_B}{2}t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{2s}{v_A + v_B} = \frac{2\cdot 0,326\,\text{m}}{2,40\,\text{m/s}} = 0,272\,\text{s}\,.$$

Vinkelakselerasjonen finnes som over. Pass på ikke å bruke sammenhengen $\alpha = v/R$ mellom A og B!

EN ALTERNATIV, men vanskeligere, måte å finne θ_{rot} på er å bruke energi. Energitapet fra A til B (total energi, rotasjon + translasjon):

$$\Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = \frac{7}{10}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{7}{10}m\left(\frac{5}{7}v_A\right)^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{7}mv_A^2 = (-0,140\,\text{J})$$

må skyldes friksjonstap pga. sluring: $\quad \Delta E_k = W_f = F_f\cdot s_{slur} = -\mu mg\cdot s_{slur}$

som gir

$$s_{slur} = \frac{-\Delta E_k}{\mu mg} = \frac{\frac{1}{7}mv_A^2}{\mu mg} = \frac{v_A^2}{7\mu g} = \frac{(1,40\,\text{m/s})^2}{7\cdot 0,150\cdot 9,81\,\text{m/s}^2} = 0,1902\,\text{m}\,.$$

Sammenhengen mellom sluret distanse, s_{slur}, translasjonsdistanse, s og rotert distanse for overflata, s_{rot}, må bli $s_{slur} = s - s_{rot}$. (F.eks. for rein skliing (ingen rotasjon) er $s = s_{slur}$ og for rein rulling (ingen sluring) er $s = s_{rot}$.) Dette gir

$$s_{rot} = s - s_{slur} = 0,326\,\text{m} - 0,1902\,\text{m} = 0,1358\,\text{m}\,, \qquad \text{og rotasjonen er} \quad \theta_{rot} = \frac{s_{rot}}{R} = \frac{0,1358\,\text{m}}{0,0500\,\text{m}} = \underline{2,72}\,.$$

Til slutt en siste alternativ metode å finne θ_{rot} er ganske smart å bruke at rotasjonsfriksjonsarbeidet er lik økning i rotasjonsenergi:

$$\frac{1}{2}I\omega_B^2 = \tau\cdot\theta_{rot} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_B}{R}\right)^2 = \mu mg\cdot R\cdot\theta_{rot} \quad\Rightarrow\quad \theta_{rot} = \frac{v_B^2}{5\mu gR}\,.$$

Oppgave 3. Fallende stang

a. Skal integrere, ikke bare bruke oppgitt formel for stang og Steiners sats.

$$I = \int_0^L y^2 \mathrm{d}m = \int_0^L y^2 M \frac{\mathrm{d}y}{L} = \left[\frac{1}{3} y^3 \frac{M}{L}\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3} M L^2} \,.$$

b. Enklest å bruke bevaring av energi. Tyngdepunktet har falt $h = L/2$ og potensiell energi mgh er overført til kinetisk rotasjonsenergi $\frac{1}{2} I \omega^2$, som gir

$$mg \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{ML^2/3}} = \underline{\sqrt{\frac{3g}{L}}} \,.$$

c. Kraftmomtent på stanga er tyngdekraft normalt på armen med lengde $L/2$. Spinnsatsen gir

$$\tau = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg \cdot L/2}{ML^2/3} = \underline{\frac{3}{2} \frac{g}{L}} \,.$$

d. Dette punktet voldte problemer for mange, men er egentlig enklere enn de fleste tror. Det gjelder å holde styr på at total akselerasjon ved rotasjon er lik baneakselerasjon (tangentialakselerasjon), pluss sentripetalakselerasjon, og at disse er normal på hverandre.

I stangas horisontale stilling har sentripetalakselerasjonen a_c retning $-x$ og baneakselerasjonen a_b retning $-y$ (så ingen $\sin\theta$ el.l. skal inn her.) Med $a_\mathrm{c} = \omega^2 \, r$ og banealakselerasjonen $a_\mathrm{b} = \alpha \, r$ og med $r = L/2$ for massesenteret og ω^2 fra b. og α oppgitt, gir dette

$$a_x = -a_\mathrm{c} = -\omega^2 \, r = -\frac{3g}{L} \frac{L}{2} = \underline{-\frac{3}{2} g} \,,$$

$$a_y = -a_\mathrm{t} = -\alpha \, r = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \frac{L}{2} = \underline{-\frac{3}{4} g} \,.$$

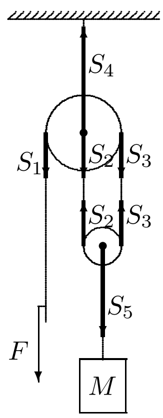
e. Krafta fra aksen $\vec{F}_\mathrm{a} = [F_{\mathrm{a}x}, F_{\mathrm{a}y}]$ bestemmes av Newton 2 for stanga. I y-retning virker på stanga $F_{\mathrm{a}y}$ pluss tyngdekrafta, i x-retning kun $F_{\mathrm{a}x}$. $\sum F_x = M a_x$ og $\sum F_y = M a_y$ med akselerasjonene a_x og a_y funnet i pkt. d. gir

$$F_{\mathrm{a}x} = M \left(-\frac{3}{2} g\right) = \underline{-\frac{3}{2} Mg} \,, \qquad F_{\mathrm{a}y} = Mg + M\left(-\frac{3}{4} g\right) = \underline{\frac{1}{4} Mg} \,.$$

(Retningen for $\vec{F}_\mathrm{a}$ er altså oppover mot venstre med vinkel $\arctan \frac{1/4}{3/2} = 9{,}5^\circ$ med x-aksen.)

Under eksamen mange rare svar i d. og e. Bl.a. går det igjen at $a_y = -g$ og $F_{\mathrm{a}y} = mg$, men det strider mot Newton 2.

Oppgave 4. Diverse



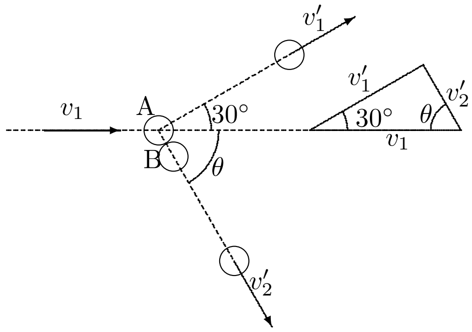
a. Systemet er i ro. Åpenbart er $S_5 = Mg$ og $F = S_1$. Fordi trinsene er friksjonsfrie, gjelder: $S_1 = S_3$ og $S_2 = S_3$. Og Newton 1 på hele systemet av trinser og masse M gir $S_4 = Mg + S_1$. Og endelig har vi N1 for hver trinse for seg: $S_1 + S_2 + S_3 = S_4$ (øvre) og $S_2 + S_3 = S_5$ (nedre). Dette gir sju enkle likninger som bestemmer de seks ukjente:

$$F = \frac{1}{2} Mg, \quad S_1 = \frac{1}{2} Mg, \quad S_2 = \frac{1}{2} Mg, \quad S_3 = \frac{1}{2} Mg, \quad S_4 = \frac{3}{2} Mg, \quad S_5 = Mg \,.$$

Under eksamen spurte noen om øverste trinse hang fast i tauet eller ikke. Svarte ja, men svaret er selvsagt da øverste trinse selvsagt ville falt pladask ned dersom ikke tauet var festa i sentrum med tauet. Komplett besvarelse krever at alle krefter er tegnet med rett retning i frilegemediagrammet for hver av trinsene.

b. Bevaring av bevegelsesmengde i x og y-retning:

$$mv_1 = mv_1' \cos 30^\circ + mv_2' \cos\theta \qquad (2)$$
$$0 = mv_1' \sin 30^\circ - mv_2' \sin\theta \qquad (3)$$



I tillegg energibevaring:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \qquad (4)$$

Det er to ukjente: v_2' og θ, og vi trenger bare to av likningene. Kan velge (2) og (3), men kanskje enklere å utnytte (4) som viser (Pythagoras) at v_1, v_1' og v_2' ligger på en rettvinkla trekant med v_1 som hypotenus (figur). Fra dette må $\underline{\theta = 60^\circ}$. Da bestemmes v_2' fra likn. (3):

$$v_2' = v_1' \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 4,33\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{0,500}{0,866} = \underline{2,50\,\mathrm{m/s}}\,.$$

En av opplysningen er altså unødvendig, vi kunne latt en av følgende være ukjent: v_1', v_1, eller det at støtet er elastisk. (Støtparameteren b er ikke eksplisitt gitt, men kan beregnes fra resultatet. Oppgaven ville vært noe vanskeligere dersom b var gitt istedet for vinkelen 30°.) Vi kan sjekke om resultatet passer inn i den ubrukte likningen (2):

$$v_1' \cos 30^\circ + v_2' \cos\theta = 4,33\,\mathrm{m/s} \cdot 0,866 + 2,50\,\mathrm{m/s} \cdot 0,50 = 5,00\,\mathrm{m/s}\,, \quad \text{lik } v_1 \text{ og altså OK.}$$

Denne oppgaven var svært godt besvart. Siden det er gitt flere opplysninger enn nødvendig finnes det flere måter å løse oppgaven. Noen har gjort dette meget kort og andre med lange utrekninger.

c. Med m_P lik massen til legemet i P betyr lik gravitasjonskraft fra M og m i P at

$$G\frac{Mm_\mathrm{P}}{x^2} = G\frac{m\,m_\mathrm{P}}{(R-x)^2}\,.$$

Med $M = 25m$ gir dette andregradslikningen som videre løses:

$$\begin{aligned} \frac{25}{x^2} &= \frac{1}{(R-x)^2} \qquad (5)\\ 25(R-x)^2 &= x^2 \\ 24x^2 - 50Rx + 25R^2 &= 0 \\ x &= \frac{50R \pm \sqrt{2500 \cdot R^2 - 4 \cdot 24 \cdot 25 \cdot R^2}}{48} = \frac{25 \pm 5}{24}R \end{aligned}$$

Løsningen $x/R = 20/24 = 5/6$ ligger mellom planetene og $x/R = 30/24 = 5/4$ ligger til høyre for m. I siste tilfelle er riktignok gravitasjonskreftene like, men går i samme retning. Løsningen er derfor

$$\underline{x = \frac{5}{6}R = 0,833 \cdot R}\,.$$

Litt smartere er det å ta kvadratrota av likn. (5), som gir

$$\frac{5}{x} = \pm\frac{1}{R-x} \quad \Rightarrow \quad 5R - 5x = \pm x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}R \quad \vee \quad x = \frac{5}{4}R\,.$$

Mange hadde oppdaget og diskutert muligheten $x/R = 5/4$, men det har ikke betydd noe ved bedømmingen.

<u>Karakterstatistikk:</u>

	A	B	C	D	E	F	Totalt	Middel	Middel *)
TFY4145	12	30	55	16	6	9	128	C	3,0
FY1001	2	4	11	7	6	12	42	D	1,9
Sum	14	34	66	23	12	21	170	C	2,7

*) Middel tallekvivalent basert på : A=5, B=4, C=3, D=2, E=1, F=0

Middelkarakter for de ulike oppgavene i % (0-39 = F, ...90-100 =A), fra faglærers bedømmelse:

1:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	
	24	33	46	40	43	43	35	44	71	58	79	
2:	a	b	c	d	3:	a	b	c	d	e	4:	a	b	c
	82	88	78	66		83	62	73	37	23		66	82	76

A Mikkelsen 3 jan. 2008